

207:61(075)

№ 3458

У 912

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

**Методы моделирования
и анализа систем
в биомедицинской инженерии**

НАПРАВЛЕНИЕ

553400 – БИОМЕДИЦИНСКАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

Таганрог 2003

УДК 007:57+007:573

И.А. Кириченко, И.Б. Старченко. Методы моделирования и анализа систем в биомедицинской инженерии: Учебное пособие. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2003. 108 с.

Данное учебное пособие охватывает теоретический материал по двум курсам: «Моделирование и управление в биологических и медицинских системах» и «Системный анализ и принятие решений». Рассмотрены системы в целом, понятие модели и основы теории моделирования, методы моделирования и анализа систем, особое внимание уделено системам в биологии и медицине. Рекомендуется студентам 3 – 5 курсов специальностей 190500, 190600.

Рецензенты: Научная медицинская фирма «Нейротех», г. Таганрог,

В.П. Карелин, д.т.н., профессор, зав. каф. математики и информатики ТИУЭ

1. СИСТЕМЫ И СИСТЕМНОСТЬ

1.1. Определение системы

Существует несколько десятков определений этого понятия. Их анализ показывает, что определение понятия «система» изменялось не только по форме, но и по содержанию. Рассмотрим основные и принципиальные изменения, которые происходили с определением системы по мере развития теории систем и использования этого понятия на практике:

- система есть совокупность элементов (подсистем). При определенных условиях элементы сами могут рассматриваться как системы, а исследуемая система – как элемент более сложной системы;

- связи между элементами в системе превосходят по силе связи этих элементов с элементами, не входящими в систему. Это свойство позволяет выделить систему из среды;

- для любой системы характерно существование интегративных качеств (свойство эмерджентности), которые присущи системе в целом, но не свойственны ни одному ее элементу в отдельности: систему нельзя сводить к простой совокупности элементов;

- система всегда имеет цели, для которых она функционирует и существует.

Термин «система» используют в тех случаях, когда хотят охарактеризовать исследуемый или проектируемый объект как нечто целое (единое), сложное, о котором невозможно сразу дать представление, показав его, изобразив графически или описав математическим выражением (формулой, уравнением и т. п.).

В первых определениях в той или иной форме говорилось о том, что система - это элементы (части, компоненты) a_i , и связи (отношения) r_i между ними:

$$\begin{aligned}
 S &\equiv \langle A, R \rangle, \\
 A &= \{a_i\}, R = \{r_i\}, \\
 S &\equiv \langle \{a_i\}, \{r_i\} \rangle, a_i \in A, r_i \in R; \\
 S &\equiv \{ \{a_i\} \& \{r_i\} \}, a_i \in A, r_i \in R.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

В приведенных формализованных записях определения использованы различные способы теоретико-множественных представлений: в первых двух используются различные способы

задания множеств и не учитываются взаимоотношения между множествами элементов и связей; в третьем отражен тот факт, что система - это не простая совокупность элементов и связей того или иного вида, а включает только те элементы и связи, которые находятся в области пересечения (&) друг с другом (1).

Отметим, что термины "элементы" - "компоненты", "связи" - "отношения" обычно используются (особенно в переводах определений) как синонимы. Однако, строго говоря, "компоненты" - понятие более общее, чем "элементы", может означать совокупность элементов; относительно понятий "связь" и "отношение" существуют разные точки зрения, что будет подробнее рассмотрено.

Если известно, что элементы принципиально неоднородны, то это можно сразу учесть в определении, выделив разные множества элементов $A = \{a_i\}$ и $B = \{b_k\}$:

$$S \equiv \langle A, B, R \rangle. \quad (2)$$

В определении М. Месаровича, например, выделены множество X входных объектов (воздействующих на систему) и множество Y выходных результатов, а между ними обобщающее отношение пересечения, что можно отобразить либо как у автора определения:

$$\begin{aligned} S &\subseteq X \times Y, \\ S &\subseteq X \cap Y. \end{aligned} \quad (3)$$

либо используя другие обозначения пересечения:

$$\begin{aligned} S &\subseteq X \& Y, \\ S &\subseteq X * Y. \end{aligned} \quad (4)$$

Если какой-то вид отношений r_i применяется только к элементам разных множеств и не используется внутри каждого из них, то это можно отразить следующим образом:

$$\begin{aligned} S &\equiv \langle \{a_i r_i b_k\} \rangle \\ a_i &\in A, \\ r_i &\in R, \\ b_k &\in B_{\zeta}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\{a_i r_i b_k\}$ - элементы новой системы, образованные из элементов исходных множеств A и B .

Для уточнения элементов и связей в определении включают свойства. Так, в определении А. Холла свойства (атрибуты Q) дополняют понятие элемента (предмета):

$$S \equiv \langle A, Q_A, R \rangle. \quad (6)$$

А.И. Уёмов, определяя систему через понятия "вещи", "свойства", "отношения", предложил двойственные определения, в одном из которых свойства q_i характеризуют элементы (вещи) a_i , а в другом - свойства q_j характеризуют связи (отношения) r_j .

$$S \equiv \{ \{ a_i, (q_i) \} \& \{ r_j \} \}, \quad S \equiv \{ \{ a_i \} \& \{ r_j, (q_j) \} \}$$

$$\begin{array}{ll} a_i \in A, & a_i \in A, \\ r_j \in R, & r_j \in R, \\ q_i \in Q_A, & q_j \in Q_R. \end{array} \quad (7)$$

В работах А.И. Уёмова принята другая символика. В целях единообразия здесь использована обычная теоретико-множественная форма представления определений, которая несколько сужает трактовку этих определений в философской концепции А.И. Уёмова, но облегчает интерпретацию их в практических приложениях.

Затем в определениях системы появляется понятие цель. Вначале - в неявном виде: в определении Ф.Е. Темникова "система - организованное множество" (в котором цель появляется при раскрытии понятия организованное); в философском словаре система - "совокупность элементов, находящихся в отношениях и связях между собой и образующих некоторое целостное единство".

Потом - в виде конечного результата, системообразующего критерия, функции (см. определения В.И. Вернадского, У.Р. Гибсона, П.К. Анохина в, М.Г. Гаазе-Рапопорта), а позднее - и с явным упоминанием о цели.

Символически эту группу определений представим следующим образом:

$$S \equiv \langle A, R, Z \rangle, \quad (8)$$

где Z - цель, совокупность или структура целей.

В некоторых определениях уточняются условия целеобразования - среда SR , интервал времени ΔT , т. е. период, в рамках которого будет существовать система и ее цели, что сделано, например, в определении В.Н. Сагатовского: система "конечное множество функциональных элементов и отношений между ними, выделенное из среды в соответствии с определенной целью в рамках определенного временного интервала":

$$S \equiv \langle A, R, Z, SR, \Delta T \rangle. \quad (9)$$

Далее, в определении системы начинают включать, наряду с элементами, связями и целями, наблюдателя N , т. е. лицо, представляющее объект или процесс в виде системы при их исследовании или принятии решения:

$$S \equiv \langle A, R, Z, N \rangle, \quad (10)$$

$$S \equiv \langle A, Q_A, R, Z, N \rangle. \quad (11)$$

В последующих вариантах этого определения Ю.И. Черняк стал учитывать и язык наблюдателя L_N , начиная с этого определения "Система есть отображение на языке наблюдателя (исследователя, конструктора) объектов, отношений и их свойств в решении задачи исследования, познания"

$$S \equiv \langle A, Q_A, R, Z, N, L_N \rangle. \quad (12)$$

В определениях системы бывает и большее число составляющих, что связано с необходимостью дифференциации в конкретных условиях видов элементов связей и т.д.

Сопоставляя эволюцию определения системы (элементы и связи, затем - цель, затем - наблюдатель) и эволюцию использования категорий теории познания в исследовательской деятельности, можно обнаружить сходство: вначале модели (особенно формальные) базировались на учете только элементов и связей, взаимодействий между ними, затем \uparrow стало уделяться внимание цели, поиску методов ее формализованного представления (целевая функция, критерий функционирования и т. п.), а начиная с 60-х гг., все большее внимание обращают на наблюдателя, лицо, осуществляющее моделирование или проводящее эксперимент (даже в физике), т. е. лицо, принимающее решение.

1.2. Классификация систем

Системы разделяют на классы по различным признакам, и в зависимости от решаемой задачи можно выбирать разные принципы классификации.

Предпринимались попытки классифицировать системы по *виду отображаемого объекта* (технические, биологические, экономические и т. п. системы); по *виду научного направления*, используемого для их моделирования (математические, физические, химические и др.). Системы делят на *детерминированные* и *стохастические*; *открытые* и *закрытые*; *абстрактные* и *материальные* (существующие в объективной реальности) и т.д.

Классификации всегда относительны. Так, в детерминированной системе можно найти элементы стохастичности, и, напротив, детерминированную систему можно считать частным случаем стохастической (при вероятности равной единице). Аналогично, если принять во внимание диалектику субъективного и объективного в системе, то станет понятной относительность разделения системы на абстрактные и объективно существующие: это могут быть стадии развития одной и той же системы.

Динамические системы характеризуются тем, что их выходные сигналы в данный момент времени определяются характером входных воздействий в прошлом и настоящем (зависит от предыстории). В противном случае системы называют статическими.

Примером динамических систем являются биологические, экономические, социальные системы; такие искусственные системы как завод, предприятия, поточная линия и т.д.

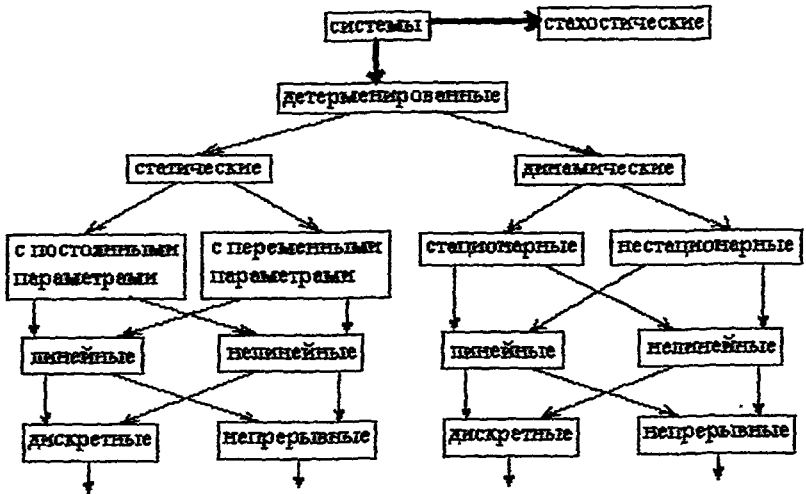
Детерминированной называют систему, если ее поведение можно абсолютно точно предвидеть. Система, состояния которой зависят не только от контролируемых, но и от неконтролируемых воздействий, или если в ней самой находится источник случайности, носит название стохастической. Приведем пример стохастических систем, это – заводы, аэропорты, сети и системы ЭВМ, магазины, предприятия бытового обслуживания и т.д.

Различают системы **линейные** и **нелинейные**. Для линейных систем реакция на сумму двух или более различных воздействий эквивалентна сумме реакций на каждое возмущение в отдельности, для нелинейных – это не выполняется.

Если параметры систем изменяются во времени, то она называется **нестационарной**, противоположным понятием является понятие **стационарной системы**.

Пример нестационарных систем – это системы, где процессы, например старения, являются на данном интервале времени существенными.

Если вход и выход системы измеряется или изменяется во времени дискретно, через шаг Δt , то система называется **дискретной**. Противоположным понятием является понятие **непрерывной системы**. Например: ЭВМ, электронные часы, электросчетчик – дискретные системы; песочные часы, солнечные часы, нагревательные приборы и т.д. – непрерывные системы.



Стрелки указывают возможный набор свойств системы

Рис.1. Классификация систем по их свойствам

Понятие открытой системы ввел Л. фон Берталанфи. Основные отличительные черты открытых систем - способность обмениваться со средой массой, энергией и информацией. В отличие от них закрытые или замкнутые системы предполагаются (разумеется, с точностью до принятой чувствительности модели) полностью лишены этой способности, т. е. изолированными от среды.

Одна из наиболее полных и интересных классификаций по уровням сложности предложена К. Боулдингом. Выделенные в ней уровни приведены в табл. 1.

Таблица 1

Тип системы	Уровень сложности	Примеры
Неживые системы	<p>Статические структуры (остовы)</p> <p>Простые динамические структуры с заданным законом поведения</p> <p>Кибернетические системы с управляемыми циклами обратной связи</p>	<p>Кристаллы</p> <p>Часовой механизм</p> <p>Термостат</p>
Живые системы	<p>Открытые системы с самосохраняемой структурой (первая ступень, на которой возможно разделение на живое и неживое)</p> <p>Живые организмы с низкой способностью воспринимать информацию</p> <p>Живые организмы с более развитой способностью воспринимать информацию, но не обладающие самосознанием</p> <p>Системы, характеризующиеся самосознанием, мышлением и нетривиальным поведением</p> <p>Социальные системы</p> <p>Трансцендентные системы или системы, лежащие в настоящий момент вне нашего познания</p>	<p>Клетки, гомеостат</p> <p>Растения</p> <p>Животные</p> <p>Люди</p> <p>Социальные организации</p>

В классификации К. Боудинга каждый последующий класс включает в себя предыдущий, характеризуется большим проявлением свойств открытости и стохастичности поведения, более ярко выраженными проявлениями закономерностей нерархичности и историчности (рассматриваемых ниже), хотя это не всегда отмечается, а также более сложными "механизмами" функционирования и развития.

Впервые разделение систем по степени организованности по аналогии с классификацией Г. Саймона и А. Ньюэлла (хорошо структуризованные, плохо структуризованные и неструктуризованные системы) было предложено В.В. Налимовым, который выделил класс хорошо организованных и класс плохо организованных или диффузных систем.

Позднее к этим двум классам был добавлен еще класс самоорганизующихся систем, который включает рассматриваемые иногда в литературе раздельно классы саморегулирующихся, самообучающихся, самонастраивающихся и т.п. систем.

Выделенные классы практически можно рассматривать как подходы к отображению объекта или решаемой задачи, которые могут выбираться в зависимости от стадии познания объекта и возможности получения информации о нем. Кратко охарактеризуем эти классы.

1. Представление объекта или процесса принятия решения в виде хорошо организованной системы возможно в тех случаях, когда исследователю удастся определить все элементы системы и их взаимосвязи между собой и с целями системы в виде *детерминированных* (аналитических, графических) зависимостей.

На представлении этим классом систем основаны большинство моделей физических процессов и технических систем.

2. При представлении объекта в виде плохо организованной или диффузной системы не ставится задача определить все учитываемые компоненты и их связи с целями системы.

Система характеризуется некоторым набором макропараметров и закономерностями, которые выявляются на основе исследования не всего объекта или класса явлений, а путем изучения определенной с помощью некоторых правил достаточно представительной *выборки* компонентов, характеризующих исследуемый объект или процесс. На основе такого *выборочного*, исследования получают характеристики или *закономерности* (статистические, экономические и т. п.) и распространяют эти закономерности на поведение системы в целом.

3. Отображение объектов в виде самоорганизующихся систем позволяет исследовать наименее изученные объекты и процессы с большой неопределенностью на начальном этапе постановки задачи.

Класс самоорганизующихся или развивающихся систем характеризуется рядом признаков, особенностей, приближающих их к реальным развивающимся объектам.

- *нестационарность* (изменчивость, нестабильность) *отдельных параметров* и *стохастичность поведения*;
- *уникальность* и *непредсказуемость поведения* системы в конкретных условиях (благодаря наличию активных элементов у системы как бы проявляется "свобода воли"), но в то же время наличие *предельных возможностей*, определяемых имеющимися ресурсами (элементами, их свойствами) и характерными для определенного типа систем структурными связями;
- *способность адаптироваться* к *изменяющимся условиям среды и помехам* (причем как к *внешним*, так и к *внутренним*), что, казалось бы, является весьма полезным свойством, однако адаптивность может проявляться не только по отношению к помехам, но и по отношению к управляющим воздействиям, что весьма затрудняет управление системой;
- *способность противостоять энтропийным* (разрушающим систему) *тенденциям*, обусловленная наличием активных элементов, стимулирующих обмен материальными, энергетическими и информационными продуктами со средой и проявляющих собственные "инициативы", благодаря чему в таких системах не выполняется закономерность возрастания энтропии (аналогичная второму закону термодинамики, действующему в закрытых системах, так называемому "второму началу") и даже наблюдаются *негэнтропийные* тенденции, т.е. собственно *самоорганизация, развитие*;
- *способность вырабатывать варианты поведения* и *изменять свою структуру* (при необходимости), сохраняя при этом целостность и основные свойства;
- *способность и стремление к целеобразованию*: в отличие от закрытых (технических) систем, которым цели задаются *извне*, в системах с активными

элементами цели формируются *внутри* системы (впервые эта особенность применительно к экономическим системам была сформулирована Ю.И.Черняком [13]);

- *неоднозначность использования понятий* (например, "цель" - "средство", "система" - "подсистема" и т. п.); эта особенность проявляется при формировании структур целей, при разработке проектов сложных автоматизированных комплексов, когда лица, формирующие структуру системы, назвав какую-то ее часть подсистемой, через некоторое время начинают говорить о ней, как о системе, не добавляя приставки "под", или подцели начинают называть средствами достижения вышестоящих целей, что часто вызывает затяжные дискуссии, легко разрешимые с помощью свойства "двуликого Януса".

Важное отличие развивающихся систем с активными элементами от закрытых: пытаясь понять принципиальные особенности моделирования таких систем, уже первые исследователи отмечали, что, *начиная с некоторого уровня сложности, систему легче изготовить и ввести в действие, преобразовать и изменить, чем отобразить формальной моделью.*

По мере накопления опыта исследования и преобразования таких систем это наблюдение подтверждалось, и была осознана их основная особенность - *принципиальная ограниченность формализованного описания развивающихся, самоорганизующихся систем.*

Эта особенность, т. е. необходимость сочетания формальных методов и методов качественного анализа, и положена в основу большинства моделей и методик системного анализа.

При формировании таких моделей меняется привычное представление о моделях, характерное для математического моделирования и прикладной математики. Изменяется представление и о доказательстве адекватности таких моделей.

Основную конструктивную идею моделирования при отображении объекта классом самоорганизующихся систем можно сформулировать следующим образом: разрабатывается знаковая система, с помощью которой фиксируют известные на данный момент компоненты и связи, а затем, путем преобразования полученного отображения с помощью установленных (принятых) правил (правил *структуризации* или *декомпозиции*; правил *композиции*, поиска *мер близости* на пространстве состояний), получают новые, неизвестные ранее компоненты, взаимоотношения, зависимости, которые могут

либо послужить основой для принятия решений, либо подсказать последующие шаги на пути подготовки решения.

Адекватность модели также доказывается как бы последовательно (по мере ее формирования) путем оценки правильности отражения в каждой последующей модели компонентов и связей, необходимых для достижения поставленных целей.

Иными словами, такое моделирование становится как бы своеобразным "механизмом" развития системы. Практическая реализация такого "механизма" связана с необходимостью разработки языка моделирования процесса принятия решения. В основу такого языка (знаковой системы) может быть положен один из методов моделирования систем (например, теоретико-множественные представления, математическая логика, математическая лингвистика, имитационное динамическое моделирование, информационный подход и т. д.), но по мере развития модели методы могут меняться.

При моделировании наиболее сложных процессов (например, процессов целеобразования, совершенствования организационных структур и т. п.) "механизм" развития (самоорганизации) может быть реализован в форме соответствующей методики системного анализа.

Рассматриваемый класс систем можно разбить на подклассы, выделив *адаптивные* или *самоприспосабливающиеся* системы, *самообучающиеся* системы, *самовосстанавливающиеся*, *самовоспроизводящиеся* и т. п. классы, в которых в различной степени реализуются рассмотренные выше и еще не изученные (например, для самовоспроизводящихся систем) особенности.

1.3. Сложная и большая система

Одной из характерных тенденций развития общества в настоящее время является появление больших чрезвычайно сложных систем (крупные автоматизированные, технологические, энергетические, гидротехнические, информационные и другие комплексы). С другой стороны, стремление познать мир обитания человечества как сложную многофункциональную систему стало реальностью сегодняшнего дня. Все это привело к необходимости определить понятие сложной системы, разработать методические принципы ее исследования, управления и проектирования.

В настоящее время однозначного, четкого определения сложной системы нет. Известны различные подходы и предложены различные формальные признаки ее определения. Так, советский ученый Г.Н. Поворов предлагает относить к сложным системы, имеющие 10^4 - 10^7

элементов; к ультра сложным - системы, состоящие из 10^7 - 10^{30} элементов; и к суперсистемам – системы из 10^{30} - 10^{200} элементов.

Такой подход имеет тот недостаток, что данное определение сложности является относительным, а не абсолютным.

Английский кибернетик С. Бир предлагает к сложным относить системы, описываемые на языке теоретико-вероятностных методов (мозг, экономика, форма и т.п.).

Определение.

Сложной системой называется система, в модели которой недостаточно информации для эффективного управления этой системой.

Таким образом, признаком простоты системы является достаточность информации для ее управления. Если же результат управления, полученный с помощью модели, будет неожиданным, то такую систему относят к сложной.

Для перевода системы в разряд простой необходимо получение недостающей информации о ней и включение ее в модель.

От сложных систем необходимо отличать большие системы.

Определение.

Система, для актуализации модели которой в целях управления недостает материальных ресурсов (машинного времени, емкости памяти, других материальных средств моделирования), называется большой.

К таким системам относятся экономические, организационно-управленческие, нейрофизиологические, биологические и т.п. системы.

1.4. Системность познавательных процессов

Интерес к системному представлению окружающей действительности вырос из необходимости представления накопленных знаний в целостной, рациональной и обозримой форме. Системность познавательного процесса вытекает из свойств системности материи; как методологический принцип науки и практики этот процесс формировался во времени постепенно, через разрешение возникающих противоречий. Рассмотрим основные методологические принципы науки, сложившиеся к нашему времени, с точки зрения системности [14,15].

Редукционизм является основным методологическим принципом науки, сформировавшимся приблизительно в XVII веке под влиянием атомистических идей Левкиппа и Демокрита, геометрии

Евклида и новых экспериментальных методов исследования. Редукционизм предполагает аналитический подход к изучаемому явлению, выделение в нем неких “первичных” элементов, аксиом, законов. Эти элементы должны быть достаточно самостоятельны, устойчивы к внешним воздействиям, простыми для изучения. Предполагалось, что полное знание о первичных элементах достаточно для того, чтобы, применив дедуктивные методы анализа, узнать все о целом. То есть путем разложения сложного на простое получить через простое сведения о сложном.

Редукционизм, как методологический принцип, игнорировал влияние внешней среды на изучаемое явление или объект. Этому способствовали два обстоятельства:

а) в основу науки был положен “чистый” лабораторный эксперимент;

б) широко использовались формы абстракции, в частности математические модели.

Редукционизм широко использовался в XVII-XIX вв., а также во многих научных работах XX века.

Как метод познания, он имел и имеет огромное значение в науке и практике: численные методы математики, закон больших чисел в теории вероятностей, разложение функций в ряды, разложение сигналов на сумму гармонических составляющих, всевозможные технологии, основанные на сборке устройств и систем из однородных блоков, стандартных плат и т.д., – все это примеры успешного применения редукции для выявления качеств систем путем суммирования качеств составляющих.

Холизм и цикличность всегда противостоял редукционизму, его идея заложена в философии неоплатонизма III-V веков. Холизм утверждает, что элементы, составляющие целое, не независимы от него, а “несут в себе его идею”. Другими словами, целое обладает особенностями, отсутствующими у его частей, а части, соединенные в целое, приобретают свойства, которые они имеют в отдельности.

Поэтому свойства и поведение части можно понять лишь с точки зрения свойств поведения целого и той роли, которую часть играет в целом. Например, функции сердца или мозга нельзя понять в отрыве от единства – человека. Имея в виду взаимосвязь свойств целого и его частей, В.И. Вернадский писал: “В каждом явлении отражается биосфера как целое”.

Целое – это совокупность частей, поэтому качественные свойства его составляющих отражаются в свойствах целого. То есть целое определяется через части, а часть определяется через целое.

Холизм таким образом предполагает цикличность построения научных теорий.

Н. Бор, анализируя методологические основы квантовой механики, пришел к выводу, что при истолковании результатов квантовой теории, относящихся к микрообъектам, нельзя обойтись без явлений макромира. Такая же циклическая конструкция рассмотрена Н. Винером в кибернетике. Он открыл, что обратная связь есть необходимость любой рациональной формы организации.

Процесс познания богатой внутренним содержанием истины также имеет циклический характер: через итерации – от частного к общему, от общего к частному; через установление связи между общим и частным и, наоборот, между частным и общим.

Структурализм. В информатике, прикладной математике широко применяются модульные структуры. Конструктивными элементами таких структур служат функциональные модули, шкалы моделей и отношения инцидентности.

Функциональный модуль, для которого определены тип входных и выходных данных, преобразует заданное множество входных данных в заданное множество выходных данных.

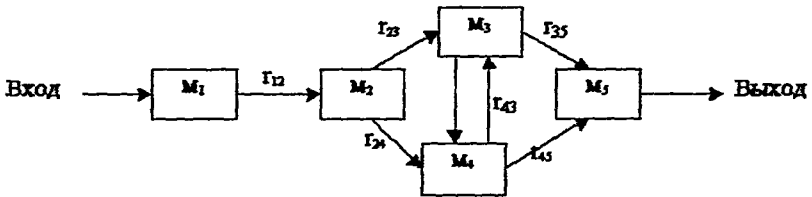


Рис.2. Модульная структура

Каждому модулю соответствует шкала моделей - набор моделей разной степени точности и сложности. Выбор той или иной модели определяется целью, а также заданной точностью, техническими возможностями переработки информации и т.д.

Отношения инцидентности связывают выход одного модуля со входом другого и обеспечивают их согласованность. Для этого бывает достаточно преобразовать данные одного типа в данные другого типа (осуществить перевод с одного "языка" на другой).

Модули можно рассматривать как преобразователи потоков (материи, информации, энергии), циркулирующих в рассматриваемом объекте.

Структурализм, как методологический подход в науке, смыкается с редукционизмом, когда рассматриваются частные,

локальные модели, детализирующие особенности части целого, и с холизмом, когда рассматривается с определенной целью вся совокупность взаимосвязанных модулей (рис. 2).

Дополнительность. Один из основателей современной физики датский физик М. Бор (1885-1962 гг.) сформулировал принцип, получивший название "дополнительности". В основе этого принципа лежат результаты, полученные при взаимодействии разных измерительных приборов с микрообъектами. При этом получены две взаимоисключающие картины - энергетически-импульсная и пространственно-временная. В квантовой механике этот принцип известен как дуализм "волна-частица". Принцип дополнительности Бора может быть обобщен до уровня общенаучного методологического принципа [8].

Пусть необходимо исследовать некоторый объект O , который имеет некоторое множество состояний S . Пусть осмысление этих состояний (аспектов, планов, проекций) приводят к двум классам состояний S_p и S_q . Причем, состояния S_p приводят к понятиям P , а S_q - к взаимоисключающим понятиям Q . Это значит, что состояния S_p не могут определять Q , а состояния S_q - понятия P . С другой стороны, противоречий от объединения P и Q нет. Во всех других состояниях, промежуточных между S_p и S_q , понятия P и Q применимы неотчетливо и их смысл не вполне определен. Причем попытка уточнения одного из понятий P или Q требует условий, при которых утрачивается осмысленность, увеличивается неопределенность сопряженных понятий. Это значит, что одновременное выражение сопряженных дополнительных понятий P и Q является неопределенным. Это и есть принцип неопределенности, который сформулирован Гейзенбергом - основателем квантовой механики. Таким образом, принцип дополнительности неотделим от принципа неопределенности. Принцип дополнительности может быть обобщен на случай, когда дополнительными является множество понятий P_1, P_2, \dots, P_m одного объекта. Примерами понятий, являющихся взаимосопреженными и дополняющими, являются: простая система - сложная система; малая система - большая; духовный план человека - его биофизический план; микромир - макромир; наука - религия и т.д. Эти же примеры демонстрируют другой принцип - принцип неопределенности.

Анализируя методологические принципы науки: редукционизм, холизм и структурализм, можно сделать вывод, что каждый из них имеет свои достоинства, но и свои ограничения, которые подчеркиваются другими принципами. Поэтому их нужно рассматривать не исключаящими друг друга, а дополняющими.

Редукционизм позволяет выявить наиболее значимые элементы системы, определить их наиболее важные свойства, влияющие на целое.

Холизм способствует цикличности в процессе поиска интегративных качеств, позволяет наиболее полно понять причинно-следственные связи между свойствами подсистем и системы в целом.

Структурализм способствует отчетливо видеть целое; широко использовать всю совокупность современных методов формального описания подсистем, предоставляя при этом возможность получать характеристики системы в целом, в частности, широко используя достижения вычислительной техники.

1.5. Системность как всеобщее свойство материи

Вселенское пространство может быть рассмотрено как система, состоящая из подсистем трех видов: экологических, социальных и искусственных (рис. 3).

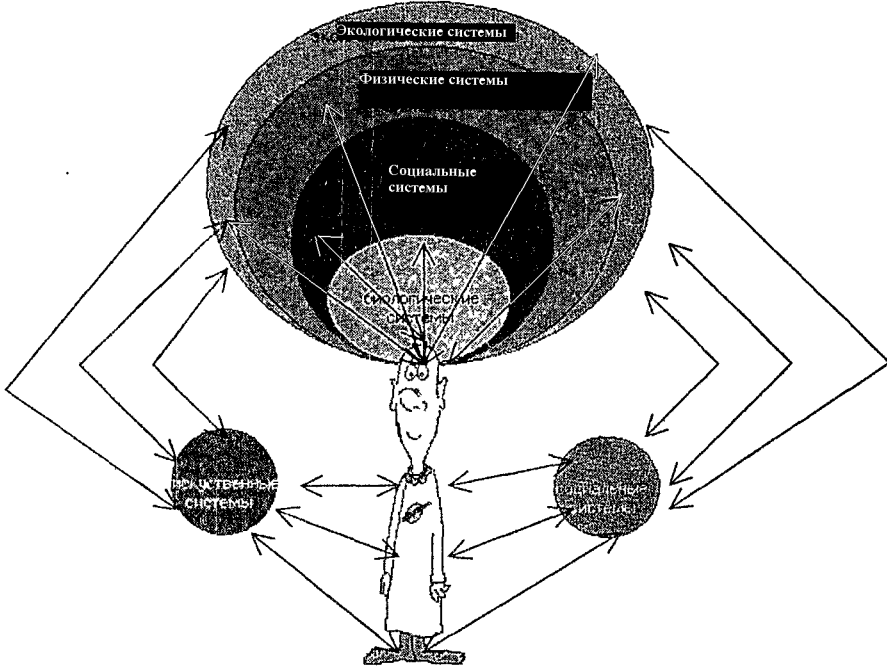


Рис. 3

Действие человека на системы вселенского пространства.

Экологическая система – это весь материальный мир обитания человека, обеспечивает жизнедеятельность живой материи на Земле и состоит из физических, химических и биологических систем.

Физические системы обеспечивают различные взаимодействия тел и полей, что является непрерывным процессом строительства всего мироздания. Механизмами взаимодействия, функционирования и управления этих систем являются объективные физические законы.

Химические системы осуществляют непрерывный обмен веществ в природе, их преобразование и транспортировку из внешней среды в биологические системы и обратно. Источниками развития этих систем являются вещества; механизмами функционирования – законы физики и химии.

Биологические системы координируют жизнедеятельность всех организмов и их отдельных органов, рост организма, строение, размножение, приспособление к внешней среде и т.д. Источником развития биологических систем являются физические, химические и в том числе и сами биологические системы вселенского пространства.

Социальные системы – это идеально-реальный мир, в котором живет человек (общество, государство, этнос, коллектив, семья, нация, институты, религия, искусства и т.д.). В этих системах люди, взаимодействуя друг с другом, создают механизмы и законы жизнеобеспечения. Роль социальных систем заключена в формировании мировоззрения, сознания, культуры, системы человеческих взаимоотношений. Социальные системы формируют модели поведения человека. Человек воспринимает ту модель, которая более всего соответствует его внутреннему содержанию. При этом человек, исходя из своих ценностных ориентаций и возможностей, определяет, что он возьмет из предлагаемых моделей поведения. Биосоциальный мир существует независимо от конкретного человека и развивается по объективным законам. Причем, если те законы, которые выработаны человечеством в текущий момент времени, не соответствуют законам эволюции, то они тормозят эволюционный процесс, в противном случае – наоборот ускоряют его.

Искусственные системы – это системы, созданные человеком в результате научно-технического прогресса. Они предназначены для повышения эффективности труда, его механизации, автоматизации и кибернетизации. Источниками “жизнедеятельности” этих систем являются все виды систем, перечисленные выше.

Человек занимает особое место среди систем, он не только живет в мире систем, но и сам является системой,

персонифицированной составляющей природы (но не ее “царем”). Несмотря на уникальное свойство человека – разум, он живет по законам природы, имеет такие же способы, законы функционирования, как вся природа, представляя из себя сложную физико-химико-биологическую систему саморегуляции. Его “системность” многогранна и, например, проявляется в его деятельности в процессе создания технических, организационных и социальных систем и пронизывает все сферы его жизни. Системность деятельности человека определяется алгоритмичностью. Ее суть - разработка плана действий в виде системы взаимосвязанных мероприятий для достижения определенных целей. Эта деятельность может носить как простой характер, так и сложный: принятие управленческих решений, решение научных задач, задач проектирования и т.д. Но в любом случае она носит ярко выраженный системный характер. В ней всегда существует оценка ситуации, определение степени актуальности проблемы, целей, представление решения проблемы в виде определенных действий, оценка альтернатив, осуществление процесса решения, оценка результата с точки зрения его последствий.

Все названные виды систем функционально связаны между собой в единое целое, которое и образует вселенское пространство как всеобщую систему. Вместе с тем каждая система автономна, выполняет свою уникальную функцию, имеет свои источники, механизмы и законы развития. Современный уровень развития науки позволяет говорить о мире, как о бесконечной иерархической системе систем, находящихся на разном уровне иерархии и разных стадиях развития.

Простые системы входят составной частью в более сложные. Функции сложной системы – обеспечить условия “жизнеобеспечения” своих подсистем. Функции подсистемы – выработать энергию и обеспечить ею систему, в которую она входит.

Природные, социальные процессы свидетельствуют о том, что системы, отдавая свою энергию и заимствуя ее у других, стремятся к максимальному самосохранению.

То есть системы, с одной стороны, не могут существовать без других систем, путем установления между ними связи для информационного, энергетического и материального обмена, а с другой – стремятся к самостоятельности, минимизации потерь от этих связей.

Таким образом, весь мир систем и системность является свойством материи.

1.6. Биологические системы

Биологической системой мы будем называть совокупность живых организмов, отдельный живой организм и любую его часть, например, орган, ткань, совокупность клеток, отдельную клетку, части клетки, метаболиты и ферменты, рецепторы и лиганды, взаимодействующие или взаимопревращающиеся в составе живого организма.

Часть биологической системы может иметь самостоятельное название, в зависимости от того, предметом какой науки является эта часть. Так, имеют хождение термины «физиологические системы», «биохимические системы» и другие, по названию соответствующих разделов биологии (Life science).

Изучить во всех деталях процессы, протекающие в биологических системах, как правило, удаётся только после того, как мы изолируем некоторую часть целого организма и на этом изолированном объекте будем проводить эксперименты, т.е. создавать ситуации, которые, как мы думаем, возникают и в живом организме.

Живой организм, с которым проводят эксперименты, или выделенные из него части (органы, клетки, части клеток, клеточные органеллы и т) мы будем называть биологическими объектами.

Экспериментальная работа с биологическими объектами ставит своей задачей, по сути дела, моделирование процессов, протекающих в живом организме. Такое моделирование - основа научного изучения явлений, но, конечно, учёный должен очень осторожно и внимательно выбирать модели, чтобы они соответствовали реальным, а не выдуманным ситуациям и процессам в живых организмах.

Биологические системы, изучаемые в биоэнергетике, могут быть изолированными, замкнутыми или открытыми. Любая биологическая система - система открытая, если быть точным. Но всё в мире относительно. И во многих случаях отдельные части биологической системы могут рассматриваться либо как замкнутые (это - довольно обычный случай), либо даже как изолированные.

2. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

2.1. Моделирование как категория. Понятие моделирования

Моделирование - это исследование объектов познания на их *моделях*; построение и изучение моделей реально существующих предметов и явлений (живых и неживых систем, инженерных конструкций, разнообразных процессов - физических, химических, биологических и др.) и конструируемых объектов (для определения, уточнения их характеристик, рационализации способов построения).

Моделирование - познавательный прием, одна из форм отражения. Моделирование характеризует один из важных путей познания. Возможность моделирования, т.е. переноса результатов, полученных в ходе построения и исследования моделей, на оригинал, основана на том, что модель в определенном смысле отображает (воспроизводит, моделирует) какие-либо его черты. При этом такое отображение основано на понятиях изоморфизма и гомоморфизма между изучаемым объектом и некоторым другим объектом-оригиналом и часто осуществляется путем предварительного исследования (теоретического или экспериментального) того и другого. Поэтому для успешного моделирования необходимо наличие уже сложившихся теорий исследуемых явлений или хотя бы обоснованных гипотез, указывающих предельно допустимые при построении моделей упрощения. Результативность моделирования значительно возрастает, если при построении модели и переносе результатов с модели на оригинал можно воспользоваться некоторой теорией, уточняющей связанную с используемой процедурой моделирования идею подобия.

Для явлений одной и той же физической природы такая теория, основанная на понятии размерности физических величин, хорошо разработана. Но для моделирования сложных систем и процессов, например биологических, используется теория больших систем, модели сложных динамических систем живой природы.

Моделирование всегда используется вместе с другими общенаучными и специальными методами. Можно разделить «материальное» (предметное) и «идеальное» моделирование. Первое можно рассматривать как экспериментальное, второе - как теоретическое. Такое разделение условно как в силу взаимосвязи обоюдного влияния этих методов, так и наличия гибридных форм,

например, «мысленный эксперимент». «Материальное» моделирование подразделяется на физическое и предметно-математическое. «Идеальное» моделирование может происходить на уровне самых общих, может быть не до конца осознанных, «модельных представлений». Моделирование на ЭВМ, получившее значительное распространение в последние годы, еще называют «кибернетическим», оно является предметно-математическим по форме и идеальным по содержанию.

Моделирование тесно связано с экспериментом. Изучение какого-либо явления на его кибернетической модели можно рассматривать как особый вид эксперимента: «модельный эксперимент», отличающийся от обычного («прямого» эксперимента) тем, что в процесс познания включается «промежуточное звено» - модель, являющаяся и средством, и объектом экспериментального исследования, заменяющим изучаемый объект. Модельный эксперимент позволяет изучать такие объекты, прямой эксперимент над которыми затруднен, экономически не выгоден или вообще не возможен в силу тех или иных причин.

Моделирование предполагает использование абстрагирования и идеализации. Отображая существенные свойства оригинала и отвлекаясь от несущественного, модель выступает как специфическая форма реализации абстракции. Выделяют три уровня абстракции: уровень потенциальной осуществимости, уровень «реальной» осуществимости и уровень практической целесообразности. На всех уровнях, однако, необходимо учитывать, что моделирование оригинала не может дать полного знания о нем. Эта черта особенно существенна, когда предметом моделирования выступают сложные системы, поведение которых зависит от большого числа взаимосвязанных факторов различной природы. Такие системы отображаются в различных моделях. Поэтому возникает проблема сравнения (оценки адекватности) разных моделей одного и того же явления, что требует формулировки критериев сравнения. Примером такого рода моделей может служить моделирование различных форм деятельности мозга. Создаваемые модели интеллекта и психических функций - например в виде эвристических программ на ЭВМ - показывают, что моделирование мышления как информационного процесса возможно в различных аспектах: формально-логическом, индуктивном, нейрологическом, эвристическом и др.

2.2. Понятие модели

Модель - это образ или праобраз какого-либо объекта или системы объектов («оригинала» данной модели), используемый при определенных условиях в качестве их заместителя. Модель может быть системой и более высокого уровня абстракции, чем оригинал (выражают идею «имитации»), и более низкого (реализуют принцип «реального воплощения»). В естественных науках обычно следуют первому из упомянутых пониманий термина.

В соответствии с различными назначениями методов моделирования понятие модели используется не только и не столько с целью получения объяснений различных явлений, сколько для предсказания интересующих исследователя явлений. Оба эти аспекта использования моделей оказываются особенно плодотворными при отказе от полной формализации этого понятия. Модель - прежде всего орудие познания. На современном этапе развития науки характерно значительное расширение арсенала применяемых моделей. Широкие возможности открывает использование компьютерных моделей, которые можно рассматривать как «универсальные моделирующие системы».

2.3. Моделирование как метод научного познания

Искусство врачевания исторически формировалось на анализе эмпирического опыта сопоставления скорее качественных, чем количественных признаков. По мере развития медицины как науки все более возрастает роль объективных критериев в оценке заболеваний человека. Переход от качественных описаний признаков к количественной оценке здоровья и болезни характеризует процесс медицинской науки. Необходимо подчеркнуть, что для диагностики и выбора метода лечения важен не только сам принцип тех или иных биологических признаков, но и стандартизация процессов измерения. Стандартизация обеспечивает возможность сопоставления клинических параметров, регистрируемых у человека, а также анализ однотипных данных в различных группах обследуемых лиц.

В процессе измерений в медицине возникают многочисленные проблемы, которые связаны с особенностями человека как биологического объекта исследования. Это прежде всего относится к невозможности получения в большинстве случаев полного описания физиологических процессов, происходящих в живом организме. Поэтому на практике в целях диагностики используют отдельные

параметры или их совокупность. При этом информация о состоянии биологического объекта представляется как качественными величинами, так и процессами (уровень артериального давления, температура тела, ЭКГ, ЭЭГ и др.).

Биологические объекты вообще и человеческий организм в частности представляют собой динамические системы с достаточно широко распределенными параметрами. В то же время в практической медицине чаще всего применяется одномоментное точечное измерение того или иного параметра, что является лишь определенным приближением к реальной действительности. Ценность такой оценки зависит от того, насколько точно организм поддерживает этот параметр постоянным и насколько в данной точке полученное значение отражает отклонение организма от нормального функционирования.

Трудности изучения человека как биологического объекта обусловлены еще и тем, что многие изучаемые физиологические параметры человека не имеют конкретного, выраженного в физических величинах определения. Только отдельные показатели, например такие, как концентрация веществ крови, уровень артериального давления, могут быть количественно определены физическими величинами.

Важнейшей проблемой биомедицинских исследований является обеспечение точности измерения диагностических параметров. Это предполагает:

- создание эталонов свойств биологических объектов,
- создание стандартизованных методик измерения,
- создание стандартных подходов к количественной оценке качественных физиологических параметров.

Вероятно, нельзя говорить об эталонной ЭКГ, ЭЭГ, ЭМГ и др. Но проводить анализ результатов таких исследований без уверенности в том, что физические величины измерены с требуемой точностью, неправомочно

Пример. При оценке температуры кожных поверхностей организма допустима точность 0,1 °С. Для дистанционного измерения оптическим датчиком температуры поверхности слизистых оболочек необходима точность 0,01 °С ... 0,001 °С.

Главной составной частью процесса совершенствования методов диагностики, лечения и реабилитации больных являются разработка и внедрение в медицину современных автоматизированных методов оценки физиологических параметров организма человека. От того, насколько достоверной и сопоставимой является информация,

получаемая на различных этапах и уровнях процесса, зависит практическая значимость данных.

Основу функционирования всех без исключения живых организмов составляют биохимические процессы. Поэтому именно лабораторные исследования позволяют получать наиболее объективную информацию о наличии сдвигов внутри биообъекта.

Научно-техническое развитие в любой области обычно идет по пути: наблюдения и эксперимент - теоретические исследования - организация процессов и систем.

В научных исследованиях большую роль играют гипотезы, т.е. определенные предсказания, основывающиеся на небольшом количестве опытных данных, наблюдений, догадок. При формировании и проверке правильности гипотез большое значение имеет в качестве метода суждение аналогия. Аналогией называют суждение о каком-либо частном сходстве двух объектов. Причем такое сходство может быть существенным и несущественным. Необходимо отметить, что понятия существенности (не существенности) сходства или различия объектов условны и относительны.

Гипотезы и аналогии, отражающие реальный объективно существующий мир, должны обладать наглядностью или сводиться к удобным логическим схемам: такие логические схемы, упрощающие природу явлений, называются моделями. Другими словами, модель (*modulus* - мера с лат.)- это объект-заместитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала. Замещение одного объекта другим с целью получения информации о важнейших свойствах объекта-оригинала с помощью объекта-модели называется моделированием. Таким образом, моделирование может быть определено как представление объекта моделью с целью получения информации.

Определяя гнемологическую роль моделирования, т.е. ее значения в процессе познания, необходимо, прежде всего, отвлечься от имеющегося в науке и технике многообразия моделей и выделить то общее, что присуще моделям различных по своей природе объектов реального мира.

Это общее заключается в наличии некоторой структуры (статической или динамической, материальной или мыслительной), которая подобна структуре данного объекта. В процессе изучения модель выступает в роли односистемного самостоятельного квазиобъекта, позволяющего получить при исследовании некоторые знания о самом объекте. Если результаты моделирования подтверждаются и могут служить основой для прогнозирования

процессов, протекающих в исследуемых объектах, то говорят, что модель адекватна объекту. При этом адекватность модели зависит от цели моделирования и принятых критериев. Формы соответствия модели и оригинала могут быть различными:

1) моделирование как познавательный процесс, содержащий переработку информации, поступающей из внешней среды;

2) моделирование заключается в построении некоторой модели - системы (второй системы), связанной с системой-оригиналом (первой системой), причем в этом случае отображение одной системы в другой является средством выявления зависимостей между двумя системами, отображенными в соотношениях подобия, а не результатом непосредственного изучения поступающей информации.

С точки зрения философии моделирование систем - эффективное средство познания живой природы.

2.4. Модели в биологии

Применяются для моделирования биологических структур, функций и процессов на разных уровнях организации живого: молекулярном, субклеточном, клеточном, органно-системном, организменном и популяционно-биоценотическом. Возможно также моделирование различных биологических феноменов, а также условий жизнедеятельности отдельных особей, популяций, экосистем.

В биологии применяются в основном три вида моделей: биологические, физико-химические и математические (логико-математические).

Биологические модели воспроизводят на лабораторных животных определенные состояния или заболевания, встречающиеся у животных или у человека. Это позволяет изучать в эксперименте механизмы возникновения данного состояния или заболевания, его течение и исход, воздействовать на его протекание. Примеры таких моделей - искусственно вызванные генетические нарушения, инфекционные процессы, интоксикации, воспроизведение гипертонических и гипоксических состояний, злокачественных новообразований, гиперфункции или гипофункции некоторых органов, а также неврозы и эмоциональные состояния. Для создания биологических моделей применяют различные способы воздействия на генетический аппарат, заражение микробами, введение токсинов, удаление отдельных органов или ведение продуктов их жизнедеятельности (например, гормонов), различные воздействия на центральную и периферическую нервную систему. Исключение из

пищи тех или иных веществ, помещение в искусственно создаваемую среду обитания и многие другие способы. Биологические модели широко используются в генетике, физиологии, фармакологии.

Физико-химические модели воспроизводят химическими или физическими средствами биологические структуры, функции или процессы и, как правило, являются далеким подобием моделируемого биологического явления. Начиная с 60-х гг. 19в., были сделаны попытки создания физико-химической модели структуры и некоторых функций клеток. Немецкий ученый М. Траубе (1867) имитировал рост живой клетки, выращивая кристаллы CuSO_4 в водном растворе $\text{K}_4[\text{Fe}(\text{CN})_6]$; французский физик С. Ледюк (1907), погружая в насыщенный раствор K_3PO_4 сплавленный CaCl_2 , получил - благодаря действию сил поверхностного натяжения и осмоса - структуры, внешне напоминающие водоросли и грибы. Смешивая оливковое масло с разными растворимыми в воде веществами и помещая эту смесь в каплю воды, О. Бюкли (1892) получал микроскопические пены, имевшие внешне сходство с протоплазмой; такая модель воспроизводила даже амебное движение. С 60-х гг. 19 в. предлагались также разные физические модели проведения возбуждения по нерву. В модели, созданной итальянским ученым К. Маттеуччи и немцем Л. Германом, нерв был представлен в виде проволоки, окруженной оболочкой из проводника второго рода. При соединении оболочки и проволоки с гальванометром наблюдалась разность потенциалов, изменявшаяся при нанесении на участок «нерва» электрического «раздражения». Такая модель воспроизводила некоторые биоэлектрические явления при возбуждении нерва. Французский ученый Р. Лилли на модели распространяющейся по нерву волны возбуждения воспроизвел ряд явлений, наблюдаемых в нервных волокнах (рефрактерный период, закон «все или ничего», двустороннее приведение). Модель представляла собой стальную проволоку, которую помещали сначала в крепкую, затем в слабую азотную кислоту. Проволока покрывалась окислом, который восстанавливался при ряде воздействий; возникший в одном участке процесс восстановления распространялся вдоль проволоки. Подобные модели, показавшие возможность воспроизведения некоторых свойств и появлений живого посредством физико-химических явлений, основаны на внешнем качественном сходстве и представляют лишь исторический интерес.

Позднее более сложные модели, основанные на гораздо более глубоком количественном подобии, строились на принципах электротехники и электроники. Так, на основе данных

электрофизиологических исследований были построены электронные схемы, моделирующие биоэлектрические потенциалы в нервной клетке, ее отростке и синапсе. Построены также механические машины с электронным управлением, моделирующие сложные действия поведения. Однако такие модели сильно упрощают явления, наблюдаемые в организме, и имеют большее значение для бионики, чем для биологии.

Большие успехи достигнуты в моделировании физико-химических условий существования живых организмов, их органов и клеток. Так, подобраны растворы неорганических и органических веществ (растворы Рингера, Локка, Тироде и др.), имитирующие внутреннюю среду организма и поддерживающие существование изолированных органов или культивируемых внутри организма клеток.

Модели биологических мембран (пленка из природных фосфолипидов разделяет раствор электролита) позволяют исследовать физико-химические основы процессов транспорта ионов и влияние на него различных факторов. С помощью химических реакций, протекающих в растворах в автоколебательном режиме, моделируют колебательные процессы, характерные для многих биологических феноменов - дифференцировки, морфогенеза, явлений в сложных нейронных сетях и т.д.

Математические модели (математические и логико-математические описания структуры, связей и закономерностей функционирования живых систем) строятся на основе данных эксперимента или умозрительно, формализованно описывают гипотезу, теорию или открытую закономерность того или иного биологического феномена и требуют дальнейшей опытной проверки. Различные варианты подобных экспериментов выявляют границы применения математических моделей и дают материал для ее дальнейшей корректировки. «Проигрывание» математической модели биологического явления на ЭВМ позволяет предвидеть характер изменения исследуемого биологического процесса в условиях, трудно воспроизводимых в эксперименте. Математические модели позволяют в отдельных случаях предсказать некоторые явления, ранее неизвестные исследователю. На примере модели сердечной деятельности, предложенной голландскими учеными ван дер Полом и ван дер Марком, основанной на теории релаксационных колебаний, указана возможность особого нарушения сердечного ритма, впоследствии обнаруженного у человека. Из математических моделей физиологических явлений следует назвать также модель возбуждения нервного волокна, разработанную английскими учеными А.

Ходжкином и А. Хаксли. На основе теории нервных сетей американских ученых У. Мак-Каллока и У. Питса строятся логико-математические модели взаимодействия нейронов. Системы дифференциальных и интегральных уравнений положены в основу моделирования биоценозов (В. Вольтерра, А.Н. Колмогоров). Марковская математическая модель процесса эволюции построена О.С. Кулагиной и А.А. Ляпуновым. И.М. Гельфандом и М.Л. Цетлиным на основе теории игр и теории конечных автоматов разработаны модельные представления об организации сложных форм поведения. Показано, что управление многочисленными мышцами тела строится на основе выработки в нервной системе некоторых функциональных блоков - синергий, а не путем независимого управления каждой мышцей.

В настоящее время в области математического моделирования биообъектов и биосистем сложились и работают следующие научные школы: Научно-исследовательский институт новых медицинских технологий Минздрава РФ, Тульский государственный университет, Институт математики НАН Украины. Разработаны: универсальный метод моделирования физиологических систем человека в норме и патологии на основе вычисления рекуррентных рядов; аппарат дифференциальных форм (внешней алгебры) применен для решения задач биоэнергоинформационного обмена и гемодинамики; для формирования алгоритмов моделирования процессов мышления и внутриорганного биоинформационного обмена, базирующихся на солитонном механизме волновой передачи, разработан метод решения канонических уравнений и др.

2.5. Теория моделирования

Моделирование представляет собой мощный метод научного познания, при использовании которого исследуемый объект заменяется более простым объектом, называемым моделью. В модели входят множество величин, подлежащих определению, а сами эти величины зависят от большого числа переменных и постоянных параметров.

Целью моделирования является прогнозирование поведения процесса в системе. Моделирование позволяет с меньшими затратами воссоздать процессы в системе и выявить критерии оптимизации. К сожалению, очень трудно воссоздать модель, отвечающую всем характеристикам объекта, поэтому при моделировании систем абсолютное подобие необязательно. Не всегда возможно создание

материальных моделей, воспроизводящих физические и функциональные характеристики изучаемого объекта, поэтому гораздо эффективней использовать абстрактное моделирование.

Основными разновидностями процесса моделирования можно считать два его вида - математическое и физическое моделирование.

При физическом (натурном) моделировании исследуемая система заменяется соответствующей ей другой материальной системой, которая воспроизводит свойства изучаемой системы с сохранением их физической природы. Примером этого вида моделирования может служить пилотная сеть, с помощью которой изучается принципиальная возможность построения сети на основе тех или иных компьютеров, коммуникационных устройств, операционных систем и приложений. Возможности физического моделирования довольно ограничены. Оно позволяет решать отдельные задачи при задании небольшого количества сочетаний исследуемых параметров системы. Действительно, при натурном моделировании практически невозможно проверить работу системы для различных вариантов. Проверка на практике около десятка разных типов условий связана не только с большими усилиями и временными затратами, но и с немалыми материальными затратами. Во многих важных областях исследований натурный эксперимент невозможен, потому что он либо запрещен (например, при изучении здоровья человека), либо слишком опасен (например, при изучении экологических явлений), либо просто неосуществим (например, при изучении астрофизических явлений).

Поэтому во многих случаях предпочтительным оказывается использование математического моделирования. Математическая модель представляет собой совокупность соотношений (формул, уравнений, неравенств, логических условий), определяющих процесс изменения состояния системы в зависимости от ее параметров, входных сигналов, начальных условий и времени. Математические модели являются одним из основных инструментов познания человеком явлений окружающего мира. Под математическими моделями понимают основные закономерности и связи, присущие изучаемому явлению. Это могут быть формулы или уравнения, наборы правил или соглашений, выраженные в математической форме.

Особым классом математических моделей являются имитационные модели. Такие модели представляют собой компьютерную программу, которая шаг за шагом воспроизводит события, происходящие в реальной системе. Преимуществом имитационных моделей является возможность подмены процесса смены событий в исследуемой системе в реальном масштабе времени

на ускоренный процесс смены событий в темпе работы программы. Результатом работы имитационной модели являются собранные в ходе наблюдения за протекающими событиями статистические данные о наиболее важных характеристиках сети: временах реакции, коэффициентах использования каналов и узлов, вероятности потерь пакетов и т.п.

В настоящее время широко применяется два вида математического моделирования: аналитическое и имитационное.

Аналитическое моделирование позволяет получать более точное решение, формируя математические законы, связывающие объекты системы, записанные в виде некоторых функциональных соотношений. Задачей аналитического моделирования является решение уравнений для получения теоретических результатов и сопоставление этих результатов с практикой. К достоинствам аналитического моделирования можно отнести большую силу обобщения, многократность использования, но наиболее полное исследование процесса функционирования системы можно провести, если известны явные зависимости, связывающие искомые характеристики с начальными условиями, параметрами и переменными системы. Однако такие зависимости удастся получить для сравнительно простых систем. Для использования аналитического метода необходимо существенно упростить первоначальную модель, чтобы иметь возможность изучить общие свойства системы.

Более сложные задачи можно решать методом имитационного моделирования при условии, что не существует законченной математической постановки данной задачи либо еще не разработаны аналитические методы решения сформулированной математической модели, либо аналитические модели имеются, но процедуры столь сложны и трудоемки, что имитационное моделирование дает более простой способ решения задачи. Имитационные модели позволяют достаточно просто учитывать случайные воздействия и другие факторы, которые создают трудности при аналитическом исследовании. Данная модель позволяет проводить эксперименты, меняя при этом условия протекания процесса, и в конечном счете определить такие условия, при которых результат удовлетворяет требованиям. Имитационное моделирование, как правило, осуществляется при помощи компьютеров и воспроизводит процесс функционирования системы во времени, имитируя явления, составляющие процесс с сохранением их логической структуры. Данные модели осуществляют прогон программы с заданными параметрами.

При формировании систем должны учитываться следующие принципы системного подхода:

1. Принцип последовательного продвижения по этапу создания системы. Это значит, что система должна исследоваться как на макроуровне, т.е. во взаимоотношении с окружающей средой, так и внутри своей структуры.
2. Принцип согласования информационных, ресурсных и других характеристик проектируемых систем.
3. Принцип отсутствия конфликтов между целями отдельных подсистем и целями всей системы.

Наконец, модели реальных процессов оказываются нелинейными. Аппарат классической математической физики приспособлен для работы с линейными моделями. В этом случае сумма (суперпозиция) частных решений уравнения есть также его решение. Найдя частное решение уравнения для линейной модели, с помощью принципа суперпозиции можно получить решение в общем случае. На этом пути в традиционной математической физике были получены замечательные результаты. Однако она становится бессильной, если встречается с нелинейными моделями. Принцип суперпозиции здесь неприменим, и алгоритмов для построения общего решения не существует. Поэтому для нелинейных моделей законченных теоретических результатов получено немного.

Методология математического моделирования в кратком виде выражена знаменитой триадой "модель - алгоритм - программа", сформулированной академиком А. А. Самарским, основоположником отечественного математического моделирования. Эта методология получила свое развитие в виде технологии "вычислительного эксперимента", разработанной школой А. А. Самарского, - одной из информационных технологий, предназначенной для изучения явлений окружающего мира, когда натурный эксперимент оказывается слишком дорогим и сложным.

Вычислительный эксперимент в отличие от натуральных экспериментальных установок позволяет накапливать результаты, полученные при исследовании какого-либо круга задач, а затем быстро и гибко применять их к решению задач в совершенно других областях. Этим свойством обладают используемые универсальные математические модели. Например, уравнение нелинейной теплопроводности пригодно для описания не только тепловых процессов, но и диффузии вещества, движения грунтовых вод, фильтрации газа в пористых средах. Изменяется только физический смысл величин, входящих в это уравнение.

Проведение вычислительного эксперимента можно условно разделить на два этапа. После первого этапа вычислительного эксперимента, если надо, модель уточняется как в направлении ее усложнения (учет дополнительных эффектов и связей в изучаемом явлении), так и упрощения (выяснение, какими закономерностями и связями в изучаемом явлении можно пренебречь). На последующих этапах цикл вычислительного эксперимента повторяется до тех пор, пока исследователь не убеждается, что модель адекватна тому объекту, для которого она составлена.

Информационные технологии, поддерживающие вычислительный эксперимент, включают в себя методы построения математических моделей силами конечных пользователей информационных систем (специалистов в своей предметной области, а не профессиональных математиков и программистов), информационную поддержку их деятельности для поиска и выбора алгоритмов и программ численного решения задач, методы и средства контроля точности производимых вычислений и правильности работы применяемых программ. При проведении вычислительного эксперимента исследователь может с помощью пользовательского интерфейса "играть" на модели, ставя интересующие его вопросы и получая ответы. Таким образом, исследователь получает мощный инструмент для анализа и прогноза поведения сложных нелинейных многопараметрических объектов и явлений, изучение которых традиционными методами затруднено или вообще невозможно.

Имитационное моделирование на сегодня становится все более зрелой технологией компьютерного моделирования, благодаря чему наблюдается устойчивый рост приложений этого метода в самых различных областях, связанных с управлением и принятием решений экономического, организационного, социального и технического характера.

Понятие «компьютерное моделирование» в сфере информационных технологий сравнительно ново и связано со становлением и выделением традиционного моделирования с помощью компьютера (последнее - это, как правило, функционально-ориентированные автоматизированные системы поддержки математического и других видов моделирования, реализуемые обычно в виде систем библиотечного типа) двух современных видов компьютерного моделирования: структурно-функционального и имитационного. Компьютерное моделирование - эффективный метод решения задач анализа и синтеза сложных систем. Методологической основой компьютерного моделирования является системный анализ (в

то время как у моделирования на компьютере - те или иные разделы теории математических моделей), именно поэтому в ряде источников наряду с термином «компьютерное» используется термин «системное моделирование», а саму технологию системного моделирования призваны осваивать системные аналитики.

Становление компьютерного моделирования связано с имитационным моделированием; имитационное моделирование было исторически первым по сравнению со структурно-функциональным, без компьютера никогда не существовало и имеет целый ряд специфических черт. Имитационное моделирование предполагает создание логико-математической модели сложной системы. При имитационном моделировании логическая структура моделируемой системы адекватно отображается в модели, а процессы ее функционирования и динамика взаимодействия ее элементов воспроизводятся (имитируются) на модели. Поэтому построение имитационной модели включает в себя структурный анализ моделируемой системы и разработку функциональной модели, отражающей динамические портреты моделируемой системы.

Другой важной специфической особенностью имитационного моделирования, как вида моделирования, является то, что методом исследования компьютерной модели здесь является направленный вычислительный эксперимент, содержание которого определяется проведенными аналитическими исследованиями и соответствующими вычислительными процедурами, реализуемыми как на стадии стратегического планирования эксперимента, так и на стадии обработки и интерпретации его результатов.

Однако ситуацию не стоит представлять так, что традиционные виды моделирования противопоставляются компьютерному моделированию. Наоборот, доминирующей тенденцией сегодня является взаимопроникновение всех видов моделирования, симбиоз различных информационных технологий в области моделирования, особенно для сложных приложений и комплексных проектов по моделированию. Так, например, имитационное моделирование включает в себя концептуальное (на ранних этапах формирования имитационной модели) и логико-математическое моделирование (включая методы искусственного интеллекта) - для целей описания отдельных подсистем модели, а также для процедур обработки и анализа результатов вычислительного эксперимента и принятия решений. Технология проведения и планирования вычислительного эксперимента с соответствующими математическими методами привнесена в имитационное

моделирование из физического (натурного) моделирования. Наконец, структурно-функциональное моделирование используется при создании стратифицированного описания многомодельных комплексов.

2.6. Принципы системного подхода в моделировании систем

В настоящее время при анализе и синтезе больших систем получил развитие системный подход, который отличается от классического (или индуктивного) подхода. Последний рассматривает систему переход от частного к общему и синтезирует (конструирует) систему путем слияния ее компонент, разрабатываемых отдельно. В отличие от этого системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит цель, причем исследуемый объект выделяется из окружающей среды.

Эта особенность учтена в следующих определениях:

- система S - целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы;
- внешняя среда E - множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием.

При системном подходе необходимо, прежде всего, четко определить цель моделирования. Поскольку сложно полностью смоделировать реально функционирующую систему (систему-оригинал или первую систему), создается модель (система-модель или вторая система). Таким образом, цель возникает из требуемых задач моделирования, что позволяет подойти к выбору критерия и оценить, какие элементы войдут в создаваемую модель M .

Важным для системного подхода является определение структуры системы - совокупность связей между элементами системы.

Структура системы может изучаться извне с точки зрения состава отдельных подсистем, а также изнутри, когда анализируются отдельные свойства, позволяющие системе достичь заданной цели. В соответствии с этим наметим ряд подходов к исследованию структуры и ее свойств: прежде всего структурный и функциональный.

При структурном подходе выявляется состав выделенных элементов S и связи между ними. Совокупность элементов S и связей между ними позволяет судить о структуре системы. Наиболее общее описание структуры - это топологическое описание, позволяющее

определить в самых общих чертах и понятиях составные части системы, хорошо формализуемое на базе теории графов.

Функциональный подход оценивает функции, которые выполняет система, причем под функциями понимается свойство, приводящее к достижению цели. Т.к. функция отображает свойство, а свойство отображает взаимодействия системы S с внешней средой E , то свойства могут быть выражены либо в виде некоторых характеристик элементов $S_{(i)}$, и подсистемы S , либо в виде системы S в целом.

Проявление функций системы во времени $S(t)$, т.е. функционирование системы, означает переход системы из одного состояния в другое, т.е. движения в пространстве состояний Z .

Следует отметить, что создаваемая модель M с точки зрения системного подхода также является системой, т.е. $S = S(M)$, и может рассматриваться по отношению к внешней среде E .

Процесс синтеза модели M на основе классического подхода (индуктивного) показан на рис. 4.

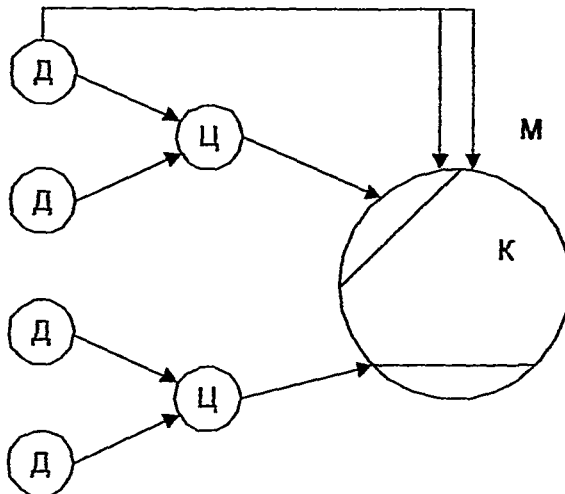


Рис.4. Процесс синтеза модели M на основе классического подхода

Реальный объект, подлежащий моделированию, разбивается на отдельные подсистемы, выбираются исходные данные D для моделирования и ставятся цели C , отображающие отдельные стороны

процесса моделирования. По отдельной совокупности исходных данных D ставится цель моделирования отдельной стороны функционирования системы, на базе которой формируются некоторые компоненты к будущей модели M , совокупность компонент объединяется в модель M . Таким образом, разработка модели M на базе классического подхода означает суммирование отдельных компонент K в единую модель, причем каждая компонента решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели.

Поэтому классический подход может быть использован для реализации сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального объекта. Процесс синтеза модели M на базе системного подхода показан на рис. 5.

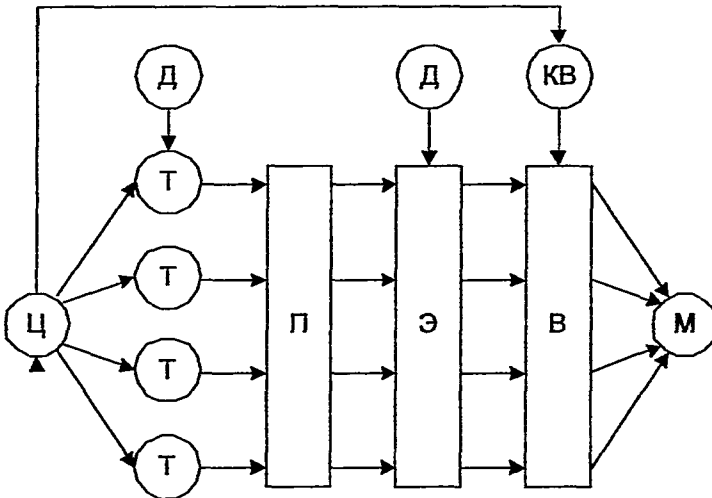


Рис.5. Процесс синтеза модели M на базе системного подхода

На основе исходных данных D , которые известны из анализа внешней системы, тех ограничений, которые накладываются на систему, формируются требования T к модели системы S . На базе этих требований формируются ориентировочно некоторые подсистемы P , элементы E и осуществляется наиболее сложный этап синтеза - выбор V составляющих систем, для чего используются специальные критерии выбора KB .

2.7. Надежность и достоверность результатов медицинского эксперимента

В большинстве случаев эксперименты так или иначе связаны с измерениями:

- определение конечных результатов;
- контроль и регулирование окружающих условий;
- контроль и регулирование параметров внутренней среды и т.д.

Известно, что ни один прибор не обладает абсолютной точностью, поэтому при измерениях так или иначе неизбежны ошибки. Кроме того, измерение, в конечном счете, в большинстве случаев завершается отсчетом, производимым визуально. В процессе отсчета также возможны ошибки, зависящие от положения глаза экспериментатора, быстроты его реакции, а в совершенных исследовательских системах – от технических характеристик, таких, например, как динамический диапазон частота дискретизации, число разрядов АЦП и т.д. Даже в тех случаях, когда измерение проводилось, как нам кажется, с абсолютной точностью, в действительности это наверняка не так.

Пример. Если предположить, например, что мы безошибочно подсчитали количество лейкоцитов в 1 мм^3 крови (что можно утверждать, когда результаты этого подсчета многократно повторены и проверены), то ошибка, во-первых, может вкратиться за счет неточного измерения соответствующего объема крови, а во-вторых, за счет того, что число лейкоцитов в единице объема – случайная величина, и, следовательно, неправильно считать полученный результат абсолютно достоверным.

Фактор случайности неизбежен при любом статистическом анализе. На основе ограниченного числа статистических данных может быть найдена лишь некоторая оценка случайной величины, которая в действительности может оказаться неверной, причем вероятность того, что она неверна, зависит от объема статистических данных: с увеличением этого объема вероятность уменьшается.

Пример. Если, например, мы утверждаем, что средний срок службы какого-нибудь прибора составляет 500-600 часов, то это утверждение обязательно нужно характеризовать числом, выражающим вероятность того, что средний срок службы действительно заключен в этом диапазоне. Это число косвенным образом характеризует объем статистических данных, послуживших основой для сделанного утверждения. Если утверждается, что срок службы составляет, например, 562 часа, то такое утверждение заведомо неверно, т.к. подобная точность может быть получена

лишь на анализе бесконечно большого объема статистических данных.

Ошибки результатов измерений и статистического анализа могут привести к неверным выводам в медицинской практике: при диагностике, дозировке лечебных средств, оценке результатов лечения. Поэтому оценка ошибок, количественная оценка достоверности и надежности результатов экспериментов играет огромную практическую роль.

2.8. Надежность результатов вычислений

Абсолютной погрешностью Δ измерения называется разность между точным значением измеренной величины и его значением, полученным в результате измерения.

Найти эту погрешность практически невозможно, так как для этого необходимо вернуться к исходной задаче измерения: произвести абсолютно безошибочный замер.

Можно, однако, достигнуть другого: задаться некоторым числом ε , его выгодно иметь по возможности меньшим, но таким, чтобы соотношение $\varepsilon \geq \Delta$ не вызывало сомнений.

Если точное значение измеряемой величины обозначить A , а значение, полученное в результате измерения, обозначить как a , то при известном ε можно записать надежный результат измерения в виде

$$a - \varepsilon \leq A \leq a + \varepsilon.$$

Число ε носит название **предельной абсолютной погрешности**.

Исключая переоценку точности результата измерения, его можно записать не одним определенным числом, а с помощью неравенства $a - \varepsilon \leq A \leq a + \varepsilon$ в виде некоторого диапазона возможных значений. Число a может быть названо **приближенным значением** измеряемой величины, если, разумеется, величина ε нас устраивает. Весьма часто полученное путем измерения число не является конечным результатом эксперимента. Конечный результат при этом может достигаться вычислениями, в которых могут участвовать приближенные значения нескольких измеренных величин. Естественно, что полученное число также будет приближенным. При этом для оценки конечного результата необходимо найти его предельную абсолютную погрешность (т.е. ε).

В общем виде задача состоит в том, чтобы по известным предельным абсолютным погрешностям отдельных замеренных величин найти предельную абсолютную погрешность конечного результата, получаемого в результате математических действий.

При сложении n приближенных чисел a_1, \dots, a_n предельная абсолютная погрешность ε_k суммы определяется как сумма отдельных абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\varepsilon_k = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i. \quad (13)$$

Эта формула справедлива и для случая вычитания одного приближенного числа из другого.

Рассмотрим более подробно умножение двух приближенных чисел $C=ab$, имеющих предельные абсолютные погрешности ε_a и ε_b и абсолютные погрешности (неизвестные нам) Δ_a и Δ_b .

Точное произведение C с учетом абсолютных погрешностей составляет

$$C = (a + \Delta_a)(b + \Delta_b) = a\Delta_b + b\Delta_a + \Delta_a\Delta_b + ab.$$

Полагая, что $\Delta_a\Delta_b \ll b\Delta_a$ и $\Delta_a\Delta_b \ll a\Delta_b$, произведение $\Delta_a\Delta_b$ можно отбросить.

Тогда, перенеся в левую часть равенства приближенное значение числа $C = ab$, получим, что абсолютная погрешность

$$\Delta_c = C - c = a\Delta_b + b\Delta_a.$$

Так как $\Delta_b \leq \varepsilon_b$ и $\Delta_a \leq \varepsilon_a$, то

$$(a\Delta_b + b\Delta_a) \leq (a\varepsilon_b + b\varepsilon_a),$$

и, следовательно, правая часть последнего неравенства может служить оценкой предельной абсолютной погрешности величины C :

$$\varepsilon_c = a\varepsilon_b + b\varepsilon_a. \quad (14)$$

Аналогично может быть выведена формула для определения предельной абсолютной погрешности частного от деления двух приближенных чисел. В случае $c = a/b$ получим

$$\varepsilon_c = \frac{a\varepsilon_b + b\varepsilon_a}{b^2}. \quad (15)$$

Пользуясь этой формулой, следует учитывать, что необходимо предварительно производить сокращения неизвестных. В противном случае величина предельной абсолютной ошибки может оказаться значительно завышенной.

Пример. Состояние дыхательной системы человека в значительной мере может быть охарактеризовано показателями вентиляции легких, которые отображают динамику смены газа во время дыхания.

Одним из таких показателей является резерв дыхания R ,

определяемый в результате измерений по формуле

$$P = \frac{(M_{\max} - M_{\text{cp}}) \cdot 100}{M_{\max}}, \quad (16)$$

где M_{\max} – максимальное количество газа, которое испытуемый может за 1 мин пропустить через легкие;

M_{cp} – количество газа, пропускаемое испытуемым через легкие за 1 мин при нормальном вдохе и выдохе.

Во избежание завышения предельной абсолютной ошибки формулу для определения резерва дыхания преобразуем к виду

$$P = (1 - \frac{M_{\text{cp}}}{M_{\max}}) \cdot 100. \quad (17)$$

Предположим, что найдено количество газа путем измерения минутных объемов: $M_{\text{cp}} = 7$ л/мин; $M_{\max} = 9$ л/мин, причем с учетом класса точности приборов $\varepsilon_{\text{cp}} = \varepsilon_{\max} = 0,5$ л/мин.

Равенство предельных абсолютных погрешностей означает, что при обоих измерениях частота дыхания была одинаковой и, следовательно, за 1 мин в обоих случаях было сделано одинаковое количество замеров объемов выдыхаемого воздуха.

Находим: $P = (1 - 7/9) \cdot 100\% = 22,3\%$.

Предельная абсолютная ошибка ε_p частного от деления M_{cp} на M_{\max} составляет

$$\varepsilon_p = \frac{7 \cdot 0,5 + 9 \cdot 0,5}{81} = 0,099 \text{ (т.е. } 9,9\%).$$

Как видим, предельная абсолютная ошибка ε_p в сравнении с величиной P довольно велика.

Одна и та же предельная абсолютная погрешность может свидетельствовать как об удовлетворительной точности, так и о неудовлетворительной точности результата измерения или вычисления. Это зависит от того, велика или мала возможная ошибка по сравнению с самим результатом. Поэтому для оценки точности используется отношение δ предельной абсолютной погрешности ε к результату A измерения или вычисления:

$$\delta = \varepsilon / A. \quad (18)$$

Это отношение носит название предельной относительной погрешности. Приближенному значению аргумента соответствует приближенное значение функции. При оценке предельной абсолютной погрешности функции $y=f(x)$ при $x=a$ можно вычислить ее значения для двух крайних возможных значений аргумента $x=a$.

Абсолютная величина разности между этими значениями

функции и будет составлять предельную абсолютную погрешность в точке $x=a$. Этот способ, однако, чересчур громоздок, поэтому применяется приближенная формула для определения предельной абсолютной погрешности функции. Необходимо отметить, что при этом имеются в виду непрерывные дифференцируемые функции.

Если a – приближенное значение аргумента x и ε_x – его предельная абсолютная погрешность, то предельную абсолютную погрешность функции $y=f(x)$ находят из выражения

$$\varepsilon_y = f'(a)\varepsilon_x, \quad (19)$$

где $f'(a)$ – значение первой производной от функции $f(x)$ при $x=a$.

2.9. Проверка гипотез

Гистограмма и плотность распределения

В подавляющем большинстве случаев конечной целью эксперимента является выявление или подтверждение некоторой закономерности. По полученным результатам обычно делается попытка выдвинуть некоторую гипотезу, характеризующуюся, например, формулой или теоретической кривой. В частности такая задача возникает при выравнивании гистограммы.

Как известно, гистограмма (см. рис. 6) является графическим изображением статистического ряда. В свою очередь, статистический ряд представляет собой таблицу, отражающую результат наблюдений или экспериментов над некоторой случайной величиной x , разделенной на то или иное число диапазонов (разрядов). Если в процессе экспериментов фиксировалось каждый раз наблюдавшееся значение x , то каждому разряду соответствует определенная частота.

В процессе построения гистограммы на оси абсцисс откладывают диапазоны значений x , а на оси ординат – соответствующие этим диапазонам частоты f . Размах (т.е. разность между наибольшим и наименьшим значением случайной величины) в пределах одного диапазона для всех них должен быть одинаков. В противном случае форма обычной гистограммы оказывается искаженной.

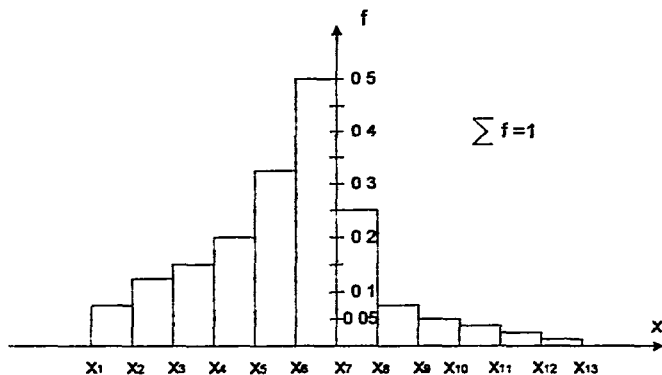


Рис. 6. Общий вид гистограммы

Количество диапазонов нельзя выбрать слишком большим, иначе число случаев, попавших в каждый диапазон, мало и сильно зависит от случайных факторов. В этом случае построенная гистограмма не отражает существенной закономерности. Однако не следует и произвольно уменьшать число диапазонов. В этом случае многие существенные детали закономерности случайной величины окажутся не выявленными. Во многих случаях сначала строят гистограмму с большим числом диапазонов, а затем, в случае ее невыразительности, таким образом, соседние диапазоны объединяют (1-й со 2-м, 3-й с 4-м и т.д.). Т.о. диапазонов становится сразу в 2 раза меньше.

Иногда максимальная выразительность гистограммы может быть достигнута объединением лишь некоторой части диапазонов. В этих случаях отказываются от построения гистограммы с равным размахом диапазонов. На оси абсцисс откладывают неравные диапазоны, а на оси ординат не частоты, соответствующие этим диапазонам, а частоты, деленные на размах.

При увеличении числа наблюдений или экспериментов число диапазонов можно брать большим. При этом границы между диапазонами все более приближаются друг к другу, а гистограмма все менее отличается от некоторой кривой плотности распределения случайной величины x . Получив кривую плотности распределения, можно сделать предположение о законе распределения случайной

величины.

Сопоставление теоретической и эмпирической закономерностей

Сделанное предположение о законе распределения должно быть проверено. Если оно правильно, то при вычисленных статистических параметрах не должно быть существенного расхождения между теоретическими и эмпирическими распределениями. На всем диапазоне возможных значений случайной величины нужно иметь достаточную уверенность в том, что расхождения между теоретическим и экспериментальным распределением являются не закономерными, а случайными, связанными с недостаточностью статистического материала.

Для сравнения распределений нужно пользоваться каким-либо критерием сравнения, который, с одной стороны, учитывал бы величину расхождения между распределениями, а с другой - учитывал бы объем статистического материала. Эти критерии носят название критериев согласия. Если вычислены параметры предполагаемого распределения, то в соответствии с правилами вычисления функций распределения можно найти вероятность того, что случайная величина примет значения не больше тех, что являются границами диапазонов:

$$F(x_i) = P(x < x_i) = \int_a^{x_i} f(x) dx, \quad (20)$$

где a – минимальное возможное значение непрерывной случайной величины x ; x_i – наибольшее значение случайной величины в i -м диапазоне, являющееся его границей.

Если общее количество наблюдений или экспериментов составляет n , то число наблюдений n_{Ti} , в которых случайная величина должна принять значения не больше x_i , составляет

$$n_{Ti} = F(x_i)n.$$

В то же время в соответствии с результатами экспериментов количество n_{Xi} значений случайной величины, не больших x_i , составляет

$$n_{Xi} = \sum_{j=1}^{j=i} n_j,$$

где n_j – количество значений случайной величины, имеющих в j -м диапазоне.

Для каждого диапазона далее вычисляют абсолютное значение разности

$$|n_{T1} - n_{э}|.$$

Максимальная разность из всех составляет наибольшее расхождение между теоретическим и экспериментальным распределениями и может быть обозначена

$$\max |n_{T1} - n_{э}| = D.$$

Аргументом критерия Колмогорова является отношение

$$\lambda = \frac{D}{\sqrt{n}}. \quad (21)$$

Это отношение учитывает как расхождение между распределениями, так и объем статистического материала. Естественно, что при одном и том же n , чем больше D (и, следовательно, больше λ), тем меньше вероятность $P(\lambda)$ того, что расхождение вызвано чисто случайными причинами.

Значения вероятности $P(\lambda)$, соответствующие значениям аргумента λ , обычно табулированы. Чем ближе $P(\lambda)$ к единице, тем больше оснований считать, что принятое теоретическое распределение правильно отражает имеющуюся закономерность.

Обычно справедливость теоретического распределения не отвергается при $P(\lambda) > 0.5$ и отвергается при $P(\lambda) < 0.1$. При промежуточных значениях $P(\lambda)$ вопрос о справедливости теоретического распределения остается открытым и нуждается в дополнительной проверке путем дополнительных экспериментов.

2.10. Доверительная оценка статистических данных

Объем статистических данных всегда ограничен. Не может быть бесконечно большого числа наблюдений над большими, неограниченного количества экспериментов, испытаний на надежность, бесконечно большого числа медицинских изделий и т.д. Интуитивно ясно, что чем больше экспериментального материала, тем больше уверенности в полученных результатах, тем надежнее выводы. Однако в практическом плане эта ясность почти ничего не дает. Инженеру и врачу важно иметь количественную оценку уверенности в результатах, связанную с объемом эксперимента.

Целью многократно повторяемого эксперимента является установление вида распределения, если он заранее не известен, определение его параметров, определение характера связей между

случайными величинами. При этом заранее приходится примириться с тем, что эти параметры в действительности отличаются от найденных.

Если объем эксперимента велик, то маловероятно, что это отличие весьма велико. Наоборот, при малом объеме эксперимента вполне может оказаться, что его результаты оцениваются исходя из случайного преобладания маловероятных исходов. В этом случае существует значительная вероятность большой ошибки.

Если в результате обработки статистических данных найден некоторый параметр A распределения (например, среднее значение случайной величины, ее дисперсия и т.п.) или параметр связи, то его действительное значение может быть как больше, так и меньше найденного. Существуют определенные вероятности и того, и другого.

Действительные значения параметра обычно называют «параметром», а найденное опытным путем его значение называют «оценкой параметра». Оценка параметра может не совпадать с самим параметром. В случае непрерывных случайных величин вообще не может с ним совпадать, т.к. при наличии одного значения оценки имеется бесконечное число возможных значений параметра.

Взяв некоторый интервал возможных значений параметра A , больших его оценки a , можно определить вероятность того, что параметр в действительности заключен внутри этого интервала. Это вероятность P_1 . Аналогично можно найти вероятность P_2 того, что параметр находится внутри некоторого интервала значений, меньших его оценки. Объединяя эти интервалы, можно получить вероятность α того, что параметр A заключен внутри интервала, содержащего в себе его оценку a :

$$\alpha = P_1 + P_2.$$

Этот интервал носит название доверительного. Верхняя (наибольшая) граница a_B и нижняя (наименьшая) граница a_H интервалов носят название доверительных границ. Вероятность, с которой параметр лежит внутри интервала, называется доверительной вероятностью $P(a)$.

Таким образом, после проведения эксперимента может быть поставлен вопрос, каков тот доверительный интервал значений параметра, в котором он заключен с данной доверительной вероятностью α (например, $\alpha=0.9$)? Вопрос можно поставить и иначе, с какой доверительной вероятностью α можно предполагать, что параметр расположен внутри некоторого заданного доверительного интервала. И, наконец, до проведения эксперимента можно поставить третий вопрос, каков должен быть объем эксперимента, чтобы с заданной доверительной вероятностью получить определенной

ширины доверительный интервал.

Доверительный интервал, доверительная вероятность и объем эксперимента тесно связаны друг с другом. Чем большая задана доверительная вероятность, тем больше получаемый доверительный интервал при фиксированном объеме эксперимента.

Распределение случайных величин

Случайные величины могут принимать различные значения. Диапазон этих значений в медико-биологических исследованиях, как правило, ограничен. Так, температура тела здорового человека ограничена диапазоном $36^{\circ} - 37^{\circ}\text{C}$. Столь же ограничены, как в норме, так и при патологии физиологические, антропометрические, биохимические и другие показатели. При этом внутри соответствующих диапазонов значения этих показателей встречаются с разной частотой. Чаще всего наблюдаются значения более или менее близкие к средним, а реже всего – значения, близкие к границам диапазонов. Сумма частот, с которыми встречаются отдельные значения, равна 1. Однако частоты для каждого показателя по-разному располагаются внутри диапазона.

Если отложить по оси абсцисс отдельные значения случайной величины, а по оси ординат – частоты, с которыми эти значения встречаются в эксперименте достаточно большого объема, то, соединяя соответствующие точки на плоскости, можно получить кривую, характеризующую зависимость частоты значений данной случайной величины от самих ее значений.

Можно, используя те же данные, получить зависимость другого вида. Пусть имеется некоторая случайная величина x , которая может принимать все значения только на участке числовой оси от a до b . Вероятность того, что случайная величина x принимает значение меньше a и больше b , равна нулю. Вероятность того, что x принимает значение меньшее или равное b , равна 1.

Если x является текущей переменной координатой, пробегающей все возможные состояния от a до b , а $F(x)$ – вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x , то $F(x)$ является неубывающей функцией, изменяющейся от 0 до 1.

Эта функция, так же, как и функция, непосредственно описывающая распределение частот внутри диапазона, полностью характеризует это распределение. Зная эту функцию, можно определить вероятность того, что случайная величина находится на

любом интересующем нас участке диапазона.

Если нас интересует, например, вероятность $P(x_1, x_2)$ того, что случайная величина в очередном эксперименте примет значение в промежутке от x_1 до x_2 , то эту вероятность легко найти как разность $P(x_1, x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

Функция $F(x)$ называется функцией распределения случайной величины x . Независимо от того, чему равны a и b , $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Некоторые важные и теоретически изученные распределения имеют бесконечно большой диапазон теоретически возможных значений $a = -\infty$, $b = +\infty$.

Ранее рассмотренную функцию, непосредственно характеризующую распределение частот внутри диапазона, можно было бы преобразовать в непрерывную функцию, если бы имелась возможность бесконечно приближать друг к другу соседние значения случайной величины и определять частоту каждого из них.

На практике она может быть получена дифференцированием функции распределения $F(x)$.

$$f(x) = F'(x)$$

Таким образом $f(x)$ характеризует мгновенную скорость роста вероятности того, что случайная величина примет значение, не меньше c . Функция $f(x)$ называется кривой распределения или плотностью распределения.

Значения функции распределения $F(x)$ для некоторого значения случайной величины c независимо от вида распределения определяется путем интегрирования:

$$F(c) = \int_{-\infty}^c f(x) dx. \quad (22)$$

Если при известной плотности распределения $f(x)$ необходимо определить вероятность $P(a, b)$ того, что случайная величина примет значение внутри интервала от a до b , то

$$P(a, b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx - \int_{-\infty}^a f(x) dx. \quad (23)$$

Параметры распределений случайной величины

Для многих распределений, выражаемых конкретными

функциями $F(x)$ и $f(x)$, характерны общие виды параметров, которые отображают свойства этих распределений и дают возможность найти значения функций для любого значения x . К таким параметрам относятся следующие:

1. **Математическое ожидание** M случайной величины, вместо которого в статистике часто употребляют термин «среднее значение случайной величины». Оно определяется по формуле

$$M = \sum_{i=1}^n x_i P_i, \quad (24)$$

где n – общее число наблюдений случайной величины x ; x_i – значение случайной величины, отмеченное в i -м наблюдении; P_i – вероятность того, что случайная величина примет значение x_i .

2. **Дисперсия** D случайной величины, под которой понимается математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее среднего значения:

$$D = \sum_{i=1}^n (M - x_i)^2 P_i. \quad (25)$$

Дисперсия характеризует рассеяние значений случайной величины относительно ее среднего значения. Вместо дисперсии часто употребляют среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{D}. \quad (26)$$

3. **Асимметрия** распределения As , характеризующая распределение в плане его симметрии относительно среднего значения случайной величины.

$$As = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M)^3 P_i}{\sigma^3}. \quad (27)$$

4. **Экссесс** Ex распределения, характеризующий крутизну спада графика распределения в области среднего значения случайной величины

$$Ex = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - M)^4 P_i}{\sigma^4} - 3. \quad (28)$$

Экссесс и асимметрия служат для коррекции экспериментально полученного распределения по отношению к нормальному распределению (распределению Гаусса), имеющему те же математическое ожидание и дисперсию. Все приведенные формулы

описывают дискретные распределения, у которых случайные величины могут принимать только вполне определенные значения. Подобные случаи наблюдаются, в частности, при измерении многих признаков.

Например, температуру тела измеряют с точностью до $0,1^{\circ}\text{C}$ и поэтому записывают только определенные значения, разница между которыми соответствует классу точности измерительного прибора.

В случае непрерывного распределения формулы для расчета математического ожидания и дисперсии принимают вид

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \quad (29)$$

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (M - x)^2 f(x)dx. \quad (30)$$

Формулы для расчета асимметрии и эксцесса в случае непрерывных распределений несколько сложнее. Как правило, функции плотности распределения, имеющие асимметрию и эксцесс, заранее не известны и могут быть получены только экспериментально, т.е. как дискретные распределения. Иногда математическое ожидание, дисперсию, асимметрию и эксцесс вычисляют по формулам, вид которых отличается от вида, рассмотренного выше. В одних случаях это обусловлено особенностями распределения, в других – удобствами вычислений.

Параметры распределений рассчитывают на основе данных, полученных в эксперименте. Объем таких данных n может быть разным. Чем больше число n , тем меньше опасность того, что при получении статистических данных существенную роль сыграют случайности, не отображающие реально существующие закономерности.

В статистике применяют большое число синтезированных (обобщенных) показателей, характеризующих различные свойства распределений.

Из них следует отметить коэффициент вариации (изменчивости) k_B , который представляет собой отношение среднего квадратического отклонения σ к средней величине \bar{x} :

$$k_B = \frac{\sigma}{\bar{x}}. \quad (31)$$

Чем выше k_B , тем больше изменчивость измерений относительно средних значений; k_B оценивает также разброс при оценке нескольких выборок. С помощью этого коэффициента

сравнивают изменчивость признаков, имеющих самые различные размерности.

Различают генеральную и выборочную совокупность измерений. Под генеральной совокупностью понимают все множество возможных значений измерений x_i . Для выборочной совокупности число измерений n ограничено и в каждом конкретном случае строго определяется. Обычно считают, если $n > 30$, то среднее значение данной совокупности измерений \bar{x} достаточно приближается к его истинному значению.

Исключение грубых ошибок результатов измерений

В процессе обработки экспериментальных данных следует исключать грубые ошибки ряда. Появление этих ошибок вполне вероятно, а наличие их ощутимо влияет на результат измерений.

Известно несколько методик определения грубых ошибок статистического ряда. Наиболее простым является правило «трех сигм»: разброс случайных величин не должен превышать

$$x_{\max, \min} = \bar{x} \pm 3\sigma. \quad (32)$$

Более достоверными являются методы, базируемые на использовании доверительного интервала.

Пусть имеется статистический ряд малой выборки, подчиняющийся закону нормального распределения. При наличии грубых ошибок критерии их появления вычисляются по формулам

$$\beta_1 = (x_{\max} - \bar{x}) / \sigma \sqrt{(n-1)/n}, \quad (33)$$

$$\beta_2 = (\bar{x} - x_{\min}) / \sigma \sqrt{(n-1)/n}, \quad (34)$$

где x_{\min} , x_{\max} – наибольшее и наименьшее значения из n измерений.

Имеются таблицы критерия появления грубых ошибок, которые позволяют определить зависимость максимального значения β_{\max} от доверительной вероятности $P(\alpha)$ и количества измерений n .

2.11. Методы графической обработки результатов измерений

При обработке результатов измерений и наблюдений широко используются методы графического изображения. Это вызвано тем, что результаты измерений, представленные в табличной форме, часто не позволяют наглядно характеризовать исследуемые процессы.

Для графического изображения результатов измерений, как правило, применяют систему прямоугольных координат (см. рис. 7). Если анализируется графическим методом функция $y = f(x)$, то в системе прямоугольных координат наносятся значения точек $x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n$.

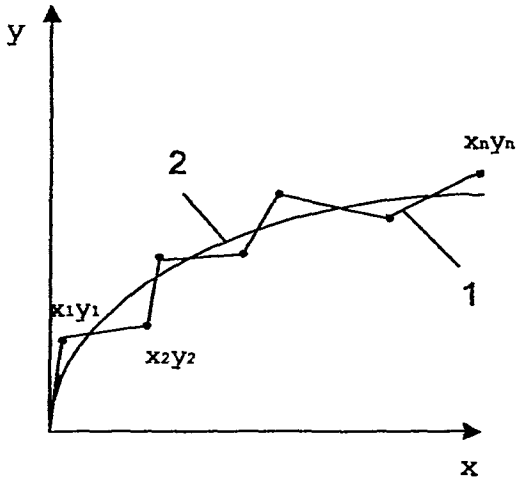


Рис. 7. Графическое изображение результатов измерений: 1 – кривая по результатам непосредственных измерений, 2 – плавная кривая

Точки на графике необходимо соединять плавной линией так, чтобы она по возможности проходила ближе ко всем экспериментальным точкам. Если соединить точки прямыми отрезками, то получим ломаную кривую. Поэтому при графическом изображении результатов измерений следует проводить между точками плавную кривую. Резкое искривление графика обычно объясняется погрешностями измерений.

Однако иногда исследуются явления, для которых в определенных интервалах наблюдается быстрое, скачкообразное изменение одной из координат, например, фазовые превращения влаги (рис. 8). В таких случаях необходимо особо тщательно соединять точки кривой, т.к. общее осреднение всех точек может привести к тому, что скачок функции $y=f(x)$ подменяется погрешностями измерений.

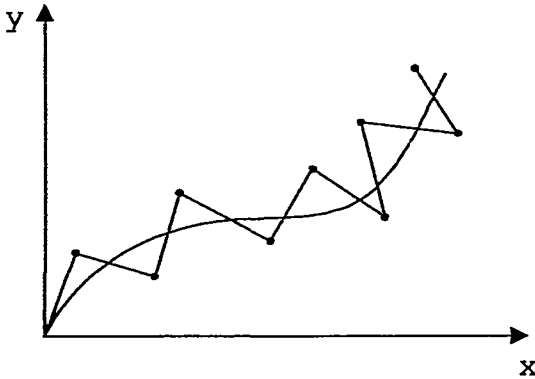


Рис.8. Скачкообразное изменение одной из координат

Часто при графическом изображении результатов измерений приходится иметь дело с тремя переменными $v = f(x, y, z)$.

В этом случае применяют метод **разделения переменных**. Одной из величин z в пределах интервала измерений $z_1 - z_n$ задают несколько последовательных значений. Для двух остальных переменных x и y строят график $y=f_1(x)$ при $z_1=\text{const}$. В результате на одном графике (рис.9) получают семейство кривых $y=f_1(x)$ для различных значений z .

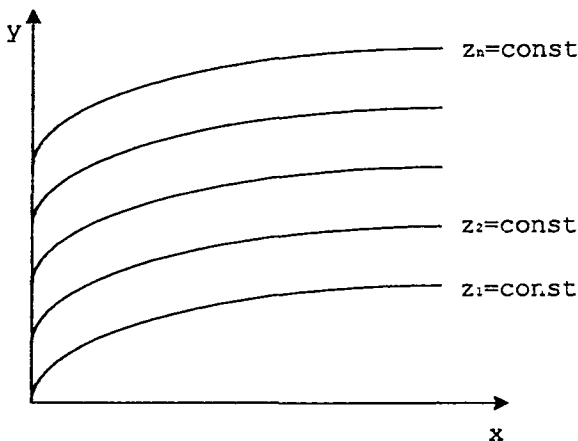


Рис. 9. Представление результатов измерений семейством кривых

При графическом изображении результатов исследований большую роль играет выбор координатной сетки. Координатные сетки бывают равномерными и неравномерными. У равномерных координатных сеток ординаты и абсциссы имеют равномерную шкалу. Из неравномерных координатных сеток наиболее распространены полулогарифмическая, логарифмическая и вероятностная сетки.

2.12. Методы подбора эмпирических формул

В процессе исследований получается статистический ряд измерений двух величин, когда каждому значению функции y_1, y_2, \dots, y_n соответствует определенное значение аргумента x_1, x_2, \dots, x_n . На основе экспериментальных данных можно подобрать алгебраические выражения функции $y=f(x)$. Эти выражения называются эмпирическими формулами. Такие формулы подбираются в пределах измеренных значений аргумента (x_1, \dots, x_n). Эмпирические формулы являются приближенными выражениями аналитических формул. Замену точных аналитических выражений приближенными, более простыми называют аппроксимацией, а функции – аппроксимирующими. Процесс подбора эмпирических формул состоит из двух этапов.

1 этап. Данные измерений наносят на сетку прямоугольных координат, соединяют экспериментальные точки плавной кривой и выбирают ориентировочно вид формулы.

2 этап. Вычисляют параметры формул, которые наилучшим образом соответствовали бы принятой формуле.

Подбор эмпирических формул необходимо начинать с самых простых выражений.

Результаты измерений многих явлений и процессов аппроксимируются простейшими эмпирическими выражениями:

$$y = a + bx, \quad (35)$$

где a, b – постоянные коэффициенты.

Поэтому при анализе графического материала необходимо по возможности стремиться к использованию линейной функции. Для этого применяют метод выравнивания. Метод выравнивания заключается в том, что кривую, построенную по экспериментальным точкам, представляют линейной функцией. Для преобразования некоторой кривой $y=f(x)$ в прямую линию вводят новые переменные: $X=f_1(x,y)$, $Y=f_2(x,y)$. В искомом уравнении они должны быть связаны

линейной зависимостью

$$Y = a + bx. \quad (36)$$

Значения X и Y можно вычислить на основе решения системы уравнений

$$\begin{cases} x = f_1(x, y), \\ y = f_2(x, y). \end{cases} \quad (37)$$

Далее, построив прямую, графически вычисляют параметры a и b (рис. 10).

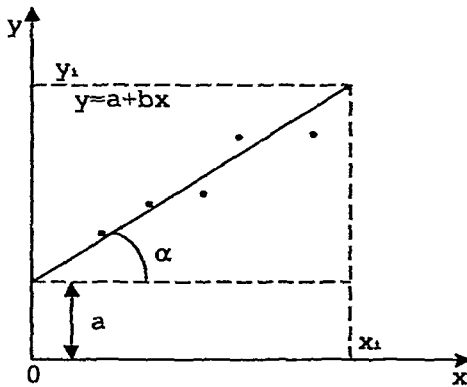


Рис. 10. Метод подбора эмпирических формул

a — ордината точки пересечения прямой с осью Y ;

b — тангенс угла наклона прямой с осью X :

$$b = \operatorname{tg} \alpha = \frac{(Y_1 - a)}{X_1}. \quad (38)$$

При графическом определении a и b обязательно, чтобы прямая строилась на координатной сетке, у которой началом является точка $Y=0$ и $X=0$. Для расчета необходимо точки Y_1 и X_1 принимать на крайних участках прямой.

Для определения параметров прямой можно применить также другой графический метод. В уравнение $Y=a + bX$ подставляют координаты двух крайних точек, взятых из графика. Получают систему из двух уравнений, из которых вычисляют a и b . После установления параметров получают эмпирическую формулу.

Пример. Подберем эмпирическую формулу измерений, результаты которых представлены в табл. 2.

Таблица 2

Y	12,1	19,2	25,9	33,3	40,5	46,4	54,0
X	1	2	3	4	5	6	7

Выбираем координаты крайних точек и подставляем их в (36)

$$A_0 + 7A_1 = 54,0 \text{ и } A_0 + A_1 = 12,1, \text{ откуда}$$

$$A_1 = (54,0 - 12,1) : 6 = 6,98 \text{ и } A_0 = 12,1 - 6,98 = 5,12.$$

Тогда формула примет вид

$$y = 5,12 + 6,98x.$$

3. РЕГРЕССИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Под регрессионным анализом понимают исследование закономерностей связи между явлениями (процессами), которые зависят от многих, иногда неизвестных факторов.

Часто между переменными x и y существует связь, но не вполне определенная, при которой одному значению x соответствует несколько значений (совокупность) y .

В таких случаях связь называют регрессионной. Таким образом, функция $y=f(x)$ является регрессионной (корреляционной), если каждому значению аргумента соответствует статистический ряд распределения y . Следовательно, регрессионные зависимости характеризуются вероятностными или стохастическими связями. Поэтому установление регрессионных зависимостей между величинами x и y возможно лишь тогда, когда выполнены статистические измерения.

Статистические зависимости описываются математическими моделями процесса, т.е. регрессионными выражениями, которые связывают независимые значения x (факторы) с зависимой переменной y (результативный признак, целевая функция, отклик).

Модель по возможности должна быть простой и адекватной. Например, модуль упругости биологической ткани E зависит от ее плотности ρ так, что с возрастанием плотности модуль упругости увеличивается. Но выявить эту закономерность можно только при наличии большого количества измерений, так как при исследовании каждой отдельной парной связи в зависимости $E=f(\rho)$ наблюдаются большие отклонения.

3.1. Коэффициент корреляции

Понятие корреляции, соответствующее при дословном переводе русскому термину «соотношение», было введено в начале XIX века французским палеонтологом Ж.Кювье.

Оно обозначает главным образом степень выраженности связи между вариационными рядами. Наглядно эта связь может быть выражена графически. На оси абсцисс откладывают значения одного вариационного ряда, на оси ординат – другого. Для каждого отдельного наблюдения получают значение, которое может быть обозначено точкой на плоскости. Число таких точек оказывается равным числу наблюдений. При этом некоторые точки могут совпадать.

Суть регрессионного анализа сводится к установлению уравнений регрессии, т.е. вида кривой между случайными величинами (аргументами x и функцией y).

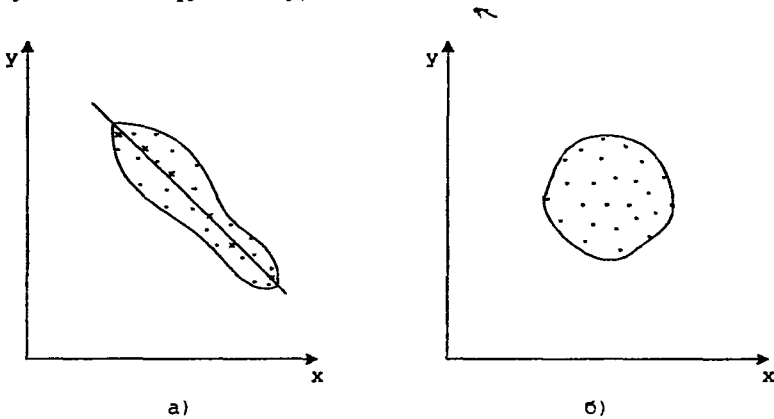


Рис. 11. Корреляционное поле

На рис. 11 показано так называемое корреляционное поле. Совокупность точек на плоскости создает общую картину корреляции и позволяет построить некоторую усредненную кривую взаимозависимости параметров. По тесноте группирования точек вокруг прямой или кривой линии, по наклону линии можно визуально судить о наличии корреляционной связи. Так, на рис. 11,а видно, что данные имеют определенную связь между x и y , а данные на рис. 11,б

такой связи не показывают.

Корреляционное поле характеризует вид связи между x и y . По форме поля можно ориентировочно судить о форме графика, характеризующего прямолинейную или криволинейную зависимость. Если на корреляционном поле усреднить точки, т.е. для каждого значения x , определить \bar{y} , и соединить точки \bar{y} , то можно получить ломаную кривую, называемую экспериментальной регрессионной зависимостью (линией). Наличие ломаной линии объясняется погрешностями измерений, недостаточным количеством измерений, физической сущностью исследуемого процесса. Если на корреляционном поле провести плавную линию между \bar{y} , которая равноудалена от них, то получается новая теоретическая регрессионная зависимость.

Различают однофакторные (парные) и многофакторные регрессионные зависимости. Парная регрессия при парной зависимости может быть аппроксимирована прямой линией, параболой, гиперболой, показательной функцией, полиномом и т.д. Двухфакторное поле можно аппроксимировать плоскостью, параболоидом второго порядка, гиперболоидом. Для переменных факторов связь может быть установлена с помощью n -мерного пространства уравнениями второго порядка:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2, \quad (39)$$

где y – функция цели (отклика) многофакторных переменных; b_i – коэффициенты регрессии, характеризующие влияние фактора x_i на функцию цели; b_{ij} – коэффициенты, характеризующие двойное влияние факторов x_i и x_j на функцию цели.

При построении теоретической регрессионной зависимости оптимальной является такая функция, в которой соблюдаются условия наименьших квадратов:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = \min,$$

где y_i – фактические ординаты поля, \bar{y} – среднее значение ординаты с абсциссой x .

Поле корреляции обычно аппроксимируется уравнением прямой $y = a + bx$. Критерием близости корреляционной зависимости между x и y к линейной функциональной зависимости является коэффициент корреляции r_{xy} , показывающий степень тесноты связи между x и y (или характер и выраженность связи между двумя вариационными рядами).

Формула для коэффициента корреляции r_{xy} имеет несколько вариантов записи. Наиболее простым является вариант, предложенный К.Пирсоном:

$$r_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (40)$$

где r_{xy} – коэффициент корреляции между параметрами x и y ; x_i и y_i – значения параметра x в i -м наблюдении и соответствующее ему значение параметра y в i -м наблюдении; n – число наблюдений; \bar{x} и \bar{y} – средние значения параметров x и y для n проведенных наблюдений.

Величина коэффициента корреляции всегда заключена в пределах

$$-1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

Если $r_{xy} < 0$, то это означает, что линейной связи не существует и с увеличением x соответствующие им значения y в среднем уменьшаются.

Если $r_{xy} > 0$, то с увеличением одного параметра другой параметр также в среднем возрастает.

Если $r_{xy} = 0$, то это означает, что параметры x и y абсолютно независимы друг от друга.

Если $r_{xy} = 1$, то это означает, что между параметрами x и y существует прямопропорциональная функциональная зависимость.

Обычно считают тесноту связи удовлетворительной при $r_{xy} \geq 0,5$, хорошей при $r_{xy} \geq 0,8$.

Для определения процента разброса (изменчивости) искомой функции y относительно ее среднего значения, определяемого изменчивостью фактора x , вычисляют коэффициент детерминации:

$$k_x = r_{xy}^2. \quad (41)$$

Уравнение регрессии прямой можно представить выражением

$$y = \bar{y} + r_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}). \quad (42)$$

Часто возникает вопрос: каков доверительный интервал для полученного коэффициента корреляции при заданной доверительной вероятности α ?

При решении вопроса о доверительном интервале для

коэффициента корреляции рассматривается доверительный интервал не самого коэффициента r_{xy} , а другой величины, обозначаемой z и связанной с r_{xy} соотношением

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r_{xy}}{1-r_{xy}}. \quad (43)$$

Множество возможных значений r_{xy} связано с множеством значений z взаимнооднозначным соответствием:

каждому значению r_{xy} в диапазоне $(-1; +1)$ соответствует единственное значение z в диапазоне $(-\infty; +\infty)$.

Преимущество z состоит в том, что диапазон его возможных значений совпадает с диапазоном нормального распределения (распределение Гаусса).

Распределение вероятностей значений z при любых значениях r_{xy} является нормальным, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения зависит только от числа наблюдений n :

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (44)$$

Задавая доверительной вероятностью α того, что величина z лежит внутри некоторого доверительного интервала, можно определить сам доверительный интервал Δz :

$$\Delta z = (z - \beta\sigma, z + \alpha\sigma), \quad (45)$$

где β - коэффициент, зависящий от α : $\beta(\alpha = 0,95) = 1,96$; $\beta(\alpha = 0,99) = 2,58$; $\beta(\alpha = 0,999) = 3,03$

Границам интервала Δz соответствуют границы доверительного интервала Δr_{xy} с той же доверительной вероятностью.

3.2. Ранговые корреляции

Определение коэффициента корреляции основано на статистических данных измерений двух параметров, предположительно связанных друг с другом. Каждый параметр в каждом из наблюдений имеет более или менее точную количественную оценку.

В медико-биологических исследованиях, однако, часто встречаются случаи, когда характеристики взаимосвязанных структур оцениваются лишь качественно, причем эти оценки являются сравнительными по принципу «больше или меньше».

Пример Каждый параметр, размер опухоли и возраст оценивается путем ранжирования

В одном из экспериментов он оценивается как минимальный и ему присваивается минимальный ранг (например 1), в другом он оценивается предпоследним по величине и ему присваивается следующий по величине ранг (например 2) и т.д. Ранги присваиваются каждому параметру в каждом эксперименте.

Таблица 3

Номер эксперимента	1	2	3	4	5	Σ
Размер опухоли V по результатам ранжирования	2	4	1	3	5	15
Возраст t по результатам ранжирования	3	5	2	1	4	15
Разности рангов по 1-му и 2-му параметрам $x_v - y_t$	-1	-1	-1	2	1	0

Результаты наблюдений можно изменить так, чтобы смысл ранжирования стал более ясным. Для этого один из параметров (размер опухоли V) записан в порядке не проведения экспериментов, а в порядке возрастания рангов.

Таблица 4

Номер эксперимента	3	1	4	2	5
Размер опухоли V по результатам ранжирования	1	2	3	4	5
Возраст t по результатам ранжирования	2	3	1	5	4
Модуль разности рангов по 1-му и 2-му параметрам $ x_v - y_t $	1	1	2	1	1

Результаты ранжирования по второму параметру теперь проясняют картину того, насколько они соответствуют упорядоченной последовательности рангов первого параметра. Видно, что некоторая тенденция к возрастанию рангов для второго параметра имеется, хотя выражена довольно слабо.

Коэффициент ранговой корреляции должен являться мерой упорядоченности ранга второй характеристики относительно первой. Связь между двумя ранжированными параметрами оценивается коэффициентом ранговой корреляции, определяемым по формуле

Спирмана:

$$r = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}, \quad (46)$$

где n – число наблюдений; x_i и y_i – ранги параметров x и y в i -м наблюдении.

Из формулы следует, что если во всех экспериментах ранги обоих параметров совпадают, то коэффициент ранговой корреляции максимален ($r = 1$). Это означает функциональную зависимость x от y .

3.3. Линейная регрессия

Коэффициент корреляции показывает, насколько тесно связаны между собой две рассматриваемые характеристики. Однако он не позволяет непосредственно оперировать значениями одной характеристики для определения другой.

Поскольку здесь рассматриваются зависимости, не являющиеся функциональными, при фиксированном значении x не может быть найдено какое-либо определенное, единственно возможное значение связанной с ним характеристики y .

Однако может быть найдено соответствующее фиксированному значению x среднее значение характеристики y , обозначаемое $M(y)$ или y' .

Если в эксперименте определены средние значения y для нескольких значений x , то можно графически построить соответствующую зависимость и найти приближенное аналитическое выражение $M(y) = f(x)$.

Эта зависимость может выражаться различными функциями. Часто она бывает линейной на всем диапазоне возможных значений x или на значительной ее части. В других случаях ее можно приближенно считать линейной, когда рассматривается небольшой участок диапазона изменения x .

При линейной зависимости величины $M(y)$ и x связывает формула

$$M_j(y) = a + bx_j, \quad (47)$$

где x_j – фиксированное j -е значение x ; $M_j(y)$ – математическое ожидание y при x_j ; a – постоянная, равная среднему y при $x=0$; b – тангенс угла наклона прямой к оси x .

Вполне возможен случай, когда значение $x=0$ не может иметь места вследствие физиологических или биохимических свойств объекта. Однако в этом случае прямая линия, выражающая зависимость $M(y)=f(x)$, формально может быть продолжена до той точки, в которой $x=0$. Тогда в этой точке отрезок, отсекаемый прямой на оси y , будет равен a .

Рассмотренная формула называется уравнением линейной регрессии, а параметр b – коэффициентом регрессии.

Параметр b показывает, на сколько единиц изменяется в среднем характеристика y при изменении характеристики x на одну единицу.

Коэффициент линейной регрессии и коэффициент корреляции связаны друг с другом соотношением

$$r_{xy} = \frac{b\sigma_x}{\sigma_y}, \quad (48)$$

где σ_x и σ_y – средние квадратические отклонения значений x и y :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}{n-1}},$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{n-1}}.$$

Коэффициенты a и b уравнения линейной регрессии определяются статистическими методами. Это означает, что в их определении может содержаться ошибка, обусловленная различными случайностями, возникающими при формировании выборки.

3.4. Однофакторный дисперсионный анализ

Если на структуру одновременно влияют многие факторы, значения которых во всех их сочетаниях случайны, то при каждом значении интересующего нас влияющего фактора характеристика структуры может принимать различные значения.

Как правило, влияния действующих факторов неравноценны. Интересующий нас фактор, например, может быть доминирующим среди всех остальных.

Оценивая влияние воздействующего фактора путем проведения наблюдений и экспериментов, необходимо учитывать, что даже при отсутствии действия каких-либо других внешних факторов индивидуальные различия однотипных структур сами по себе влияют на результаты.

Пример. В одинаковых стрессовых ситуациях артериальное давление у разных людей повышается в различной мере. Очень часто именно влияние этих индивидуальных особенностей интересует врача.

При проведении экспериментов с фиксированными значениями интересующего нас фактора могут быть вычислены средние значения характеристики структуры.

Разброс значений характеристики относительно среднего значения показывает, насколько variabelны сочетания значений посторонних факторов.

Если действия некоторых факторов не являются независимыми, то определенное значение оказывают не только каждый из факторов в отдельности, но и их сочетания.

Если нас интересует действие только одного определенного фактора A , то влияние всех остальных факторов на дисперсию характеристики можно обобщить, называя его влиянием совокупности случайных факторов C .

Полная суммарная дисперсия σ^2 складывается из дисперсии, вызванной фактором, и дисперсии, вызванной совокупностью C :

$$\sigma^2 = \sigma_A^2 + \sigma_C^2. \quad (49)$$

Определив отношение дисперсии σ_A^2 к полной дисперсии σ^2 , можно оценить силу влияния η_A фактора A на изменчивость характеристики структуры:

$$\eta_A = \frac{\sigma_A^2}{\sigma^2}. \quad (50)$$

В случае проведения дисперсионного анализа очень важно, чтобы при каждом значении исследуемого фактора было выполнено несколько экспериментов (хотя бы два).

Если это невозможно, все фиксированные значения фактора необходимо разбить на несколько групп, в каждую из которых включают близкие друг к другу значения.

После этого в расчетах участвуют средние значения фактора в каждой из групп. Эти группы называют уровнями данного фактора.

Для каждого такого уровня можно составить список наблюдавшихся значений характеристики исследуемой структуры.

Если общее число наблюдений составляет N , а число уровней фактора A составляет a , то

$$N = \sum_{i=1}^a n_i, \quad (51)$$

где n_i — число наблюдений, в которых количественное выражение фактора A было в пределах i -го уровня.

Обозначим через x_{ij} некоторое j -е значение характеристики структуры, отмеченное при действии фактора A в пределах его i -го уровня. Всего таких значений n_i . Тогда полная дисперсия σ^2 характеристики структуры определяется из выражения

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^2, \quad (52)$$

где \bar{x} — среднее значение характеристики структуры по всем N наблюдениям, x_{α} — значение характеристики в каком-либо из N наблюдений

В пределах действия i -го уровня фактора может быть найдено свое среднее значение характеристики структуры \bar{x}_i . В общем случае \bar{x}_i отличается от среднего значения \bar{x} . Поэтому можно говорить об отклонении средних групповых значений \bar{x}_i от общей средней \bar{x} .

Полная дисперсия σ^2 относительно \bar{x} показывает, как влияет различие уровней фактора A на изменение характеристики структуры x . Эта дисперсия составляет величину σ_A^2 :

$$\sigma_A^2 = \sum_{i=1}^a (\bar{x}_i - \bar{x})^2 n_i. \quad (53)$$

Очевидно, что величина силы влияния фактора A на дисперсию $0 \leq \eta_A \leq 1$.

Чем ближе η_A к 1, тем достовернее влияние фактора A . В случае, когда полученное значение $\eta_A < 0,3$, можно усомниться в том, оказывает ли фактор A вообще какое-либо влияние на характеристику x . Проверка достоверности полученного результата составляет важную заключительную часть дисперсионного анализа.

Задавшись доверительной вероятностью α того, что влияние фактора A имеет место, можно определить показатель достоверности этого влияния Φ по формуле:

$$\Phi = \frac{\eta_A(N-a)}{(1-\eta_A)(a-1)}. \quad (54)$$

Полученное значение сравнивают с табличным значением стандартного преобразования Фишера F . Оно представляет собой минимальный показатель достоверности, который при заданном α достаточен для того, чтобы считать влияние фактора A действительно имеющим место. В случае если $\Phi \geq F$, можно считать влияние фактора A достоверным с заданной вероятностью α .

Более конкретной целью является определение с заданной доверительной вероятностью α доверительного интервала для показателя силы влияния η_A . Доверительные границы определяют по формулам:

$$\eta_{A\min} = \eta_A - \frac{(1-\eta_A)(a-1)F}{N-a}, \quad (55)$$

$$\eta_{A\max} = \eta_A + \frac{(1-\eta_A)(a-1)F}{N-a}, \quad (56)$$

где F – значение преобразования Фишера для заданной доверительной вероятности α при имеющемся общем числе наблюдений N и числе уровней действующего фактора a . Определение доверительных интервалов возможно только при $\Phi \geq F$.

3.5. Двухфакторный и многофакторный дисперсионный анализ

В случае, когда изучается действие на структуру двух факторов и более, вычислительные процедуры несколько усложняются. Однако их выполнение можно упростить, если использовать специально разработанные схемы расчетов.

Изучение одновременного действия двух факторов A и B на какую-либо структуру методами дисперсионного анализа возможно лишь в случаях, когда A и B независимы друг от друга.

Следует отметить, что отсутствие зависимости между факторами не исключает того, что их влияние на структуру в отдельности дополняется их совокупным влиянием. Это объясняется тем, что в условиях действия фактора B чувствительность структуры к действию фактора A может увеличиваться или уменьшаться.

Один из факторов, например A , сам по себе может вовсе не влиять на структуру (т.е. $\sigma_A^2=0$), в то время как $\sigma_{AB}^2 \neq 0$ и,

3.6. Регрессия рядов динамики

В рассмотренных выше разделах связи между объектами исследования рассматривались одновременно, т.е. независимо от времени. Во многих случаях, однако, статистические показатели влияющего объекта с течением времени изменяются. Это приводит к изменению статистических показателей зависимого объекта. В более сложных случаях наблюдаются резкие колебания не учитываемых возмущающих факторов, влияющих на величину показателя зависимого объекта. Таким образом, динамика показателей может иметь существенное значение.

Ряд динамики в наиболее общем случае можно представить как сумму нескольких компонент:

- трендовой;
- сезонной;
- возмущающей.

Тренд отражает влияние эволюционного характера и проявляется долговременным закономерным изменением (связанным, например, с влиянием на организм возраста, длительного применения лекарственных средств и пр.).

Сезонные изменения обусловлены чувствительностью организма к смене времени суток, времени года, циклическими влияниями на состояние организма его собственных «биологических часов» и др.

Возмущающая компонента, как правило, заранее не предсказуема и связана со случайными воздействиями на организм (стрессовые ситуации, остро протекающие заболевания и др.).

Регрессия рядов динамики рассматривается исходя из тех же принципов, что и регрессия, изучаемая по результатам одномоментных наблюдений.

Линейная регрессия рядов динамики в случае зависимой переменной y и m влияющих переменных описывается формулой

$$\bar{y}_t = b_0 + b_1 x_{t_1} + \dots + b_m x_{t_m}. \quad (59)$$

Зависимая переменная y_t в момент времени t в каждом конкретном наблюдении принимает значение

$$y_t = \sum_{k=0}^m b_k x_{t_k} + U_t, \quad (60)$$

где x_k – значение k -й влияющей переменной; b_k – коэффициент регрессии при k -й переменной; U_t – значение возмущающей не учитываемой переменной.

Для любого момента времени переменная $x_{t0} = 1$, т.е. она является в данном уравнении фиктивной, т.к. b_0 – постоянная регрессии.

Введение динамики в уравнение множественной регрессии приводит к необходимости учитывать инерционность системы влияющих и зависимой переменных.

Проблема заключается в том, что изменения влияющих переменных во времени часто опережает изменение зависимой переменной на время запаздывания τ . Отставание значений одного ряда (т.е. зависимой переменной) относительно значения другого ряда динамики называется *лагом*.

Запаздывание обычно обусловлено переходными процессами в системе взаимодействия исследуемых объектов.

При создании регрессионных моделей рядов динамики приходится учитывать лаговые значения влияющих переменных. Уравнение регрессии может при этом иметь вид

$$y_t = b_0 + b_1 x_{t-1;1} + \dots + b_m x_{t-1;m} \quad (61)$$

В этом уравнении для получения значения зависимой переменной необходимо брать значения влияющих переменных, сдвинутые по времени в сторону опережения на один интервал, т.е. в этом случае $\tau = 1$. В более сложных случаях лаги разных влияющих переменных относительно зависимой переменной различны, т.е. влияющие переменные имеют лаги (отставания) и относительно друг друга. Тогда в уравнение регрессии следует подставлять значения влияющих переменных, соответствующие различным моментам времени динамических рядов.

3.7. Проверка гипотезы о наличии тренда

Для проверки гипотезы о наличии тренда предложено несколько методов. Рассмотрим метод Фостера-Стюарта, позволяющий проверить гипотезу о качественных соотношениях между уровнями динамического ряда.

Показателями служат величины U_i и I_i , которые определяют путем последовательного сравнения уровней. Уровню, превышающему по величине все предыдущие уровни, присваивается значение $U_i = 1$, в

остальных случаях $U_i = 0$. Величина l_n , наоборот, значение $l_i = 1$ присваивается тогда, когда уровень меньше всех предыдущих, в остальных случаях присваивается значение $l_i = 0$. Далее определяются следующие суммарные значения:

$$S_n = U_n + l_n; \quad (62)$$

$$S = \sum_{i=1}^n S_{ti}; \quad (63)$$

$$D_n = U_n + l_n; \quad (64)$$

$$d = \sum_{i=1}^n D_{ti}, \quad (65)$$

где n – число уровней, составляющих динамический ряд.

Очевидно, что $S_i = 0$, если u_i – ни наибольшее, ни наименьшее значение среди предшествовавших уровней. Во всех остальных случаях $S_i = 1$. Вследствие этого $0 \leq S \leq n-1$. Первый из уровней, который не с чем сравнивать, во внимание не принимается. Величина $D_i = 0$, если уровень ни наибольший, ни наименьший среди предшествовавших, то $D_i = 1$, если уровень наибольший и $D_i = n-1$, если уровень наименьший. Нижний предел соответствует монотонно убывающему, а верхний – монотонно возрастающему динамическому ряду.

Показатели S и d зависят от того, насколько случайно распределены величины уровней во времени. Математическое ожидание величины d при случайном расположении уровней во времени равно нулю, а математическое ожидание \bar{S} величины S при тех же условиях зависит от числа уровней.

Гипотезу о наличии тренда проверяют на основе t – критерия Стьюдента по формуле:

$$t_1 = \frac{\bar{S} - S}{\sigma_1}, \quad (66)$$

$$t_2 = \frac{d}{\sigma_2}, \quad (67)$$

где σ_1 и σ_2 – средние квадратические отклонения (ошибки) показателей S и d , определяемые по приближенным формулам:

$$\sigma_1 \approx \sqrt{\ln n - 3.4253}, \quad (68)$$

$$\sigma_2 \approx \sqrt{2 \ln n - 0.8456}. \quad (69)$$

С помощью полученных критериев t_1 и t_2 проверяют гипотезу об отсутствии тренда соответственно среднего значения показателя, по которому составлен ряд динамики и дисперсия этого показателя. Для этого их сравнивают с табличными значениями критерия Стьюдента при заданной доверительной вероятности α . Если соответствующее расчетное значение t не меньше табличного, то гипотеза о наличии тренда среднего значения или его дисперсии не может быть отвергнута.

3.8. Выявление тренда методом скользящей средней

Состояние организма, определяемое совокупностью его характеристик, непрерывно меняется. Деятельность его как гомеостатической системы направлена в норме на поддержание в достаточно узких пределах основных жизнеобеспечивающих характеристик. Поскольку изменения происходят во времени, они могут быть изображены в виде графиков или таблиц. Эти изменения могут отражать случайные флюктуации окружающих условий:

- кратковременные систематические изменения,
- сезонные изменения,
- долговременные тенденции и др.

Влияние относительно редких случайных воздействий на характеристики организма в большинстве случаев интересует физиологов и морфологов. Клиницистов в наибольшей мере интересуют относительно кратковременные закономерные уменьшения, связанные с развитием острых патологических процессов, а также длительные закономерные изменения состояния организма при хронических заболеваниях. Специалистов по медицинской статистике в основном интересуют долговременные и закономерные процессы и тенденции.

Одной из наиболее часто встречающихся задач, связанных с исследованиями, проводимыми в динамике, является выделение и математическое описание кратковременных закономерных тенденций на фоне многих независимых и быстро меняющихся случайных флюктуаций и долговременных закономерных тенденций. Наиболее простым приемом выделения более общей закономерности среди

случайных флюктуаций является метод скользящей средней.

Суть метода заключается в том, что фактически наблюдаемое в момент t значение исследуемого показателя a_t заменяется средней величиной a_t' , получаемой после суммирования n предшествующих и n последующих значений этого показателя, а также самой величины a_t :

$$a_t' = \frac{a_{t-n} + \dots + a_{t-1} + a_t + a_{t+1} + \dots + a_{t+n}}{2n+1}. \quad (70)$$

Пример. Если средняя величина определяется по пяти значениям, то

$$a_t' = \frac{a_{t-2} + a_{t-1} + a_t + a_{t+1} + a_{t+2}}{5}.$$

Общее число объединяемых значений желательно брать нечетным, чтобы само значение a_t находилось посередине. Метод скользящей средней позволяет в значительной мере избавиться от влияния флюктуаций и выявить наиболее общую тенденцию. Этот метод имеет существенный недостаток: n первых и n последних значений не попадают в усредненный ряд.

Одним из основных условий построения ряда зависимости некоторого показателя от времени (т. е. временного ряда) является получение значений этого показателя в практически однородных условиях.

При сравнении фактического ряда значений и ряда, полученного усреднением методом скользящей средней, обычно получается, что во втором ряду уже практически не наблюдаются всплески.

Основным статистическим параметром для временного ряда, содержащего n значений показателя, измеренного через равные промежутки времени, служит средняя величина показателя \bar{y} и его среднее квадратическое отклонение σ , определяемое по формулам:

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_t + \dots + y_{n-1} + y_n}{n}, \quad (71)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n}}. \quad (72)$$

Эти показатели, однако, не являются динамическими и не отражают характера изменения значения y во времени. Для анализа этих изменений необходимо найти аналитическую зависимость, в которой время t – аргумент, а фактор y – его функция.

3.9. Особенности статистических методов анализа медико-биологических исследований

Формализация подхода к исследованию корреляционных зависимостей в медицине может привести к совершенно ошибочным логическим построениям. Статистические методы анализа связей между явлениями в большинстве случаев применяются тогда, когда причинные связи между ними неизвестны или не совсем выяснены. Вследствие этого при установлении в достаточной мере статистически достоверной корреляции между явлениями появляется желание связать их непосредственной причинной связью, не вдаваясь в глубокое физиологическое или биохимическое исследование сущности этой связи.

Ошибочное логическое построение в большинстве случаев сводится к необоснованному выводу: поскольку явления A и B находятся в тесной корреляционной зависимости и явление B наблюдается позже явления A , то явление A является причиной B . Реально существующая формальная связь между явлениями A и B может быть совсем иной.

1. Ни A , ни B не являются причинами возникновения друг друга. Существует явление C , которое вызывает явления A и B независимо друг от друга.

Если явление C патологическое, то A и B тоже патологические явления, но в причинно-следственной схеме они более удалены от основного звена заболевания. Поскольку A и B не связаны друг с другом, попытка избавиться от явления A не может избавить от патологического явления B , хотя между ними и обнаруживается тесная корреляция. Одновременно ликвидировать оба эти явления можно, только ликвидировав патологическое явление C как их общую причину.

2. Явления A и B не только не связаны друг с другом причинно-следственной цепью, но даже не имеют единой первопричины.

Пример. Рассматривая уменьшение распространенности тяжелых инфекционных болезней за последнее десятилетие и увеличение в этот же период частоты сердечно-сосудистых

заболеваний, можно заметить достаточно четкую корреляционную связь между этими явлениями и сделать вывод, что снижение числа инфекционных болезней является причиной увеличения числа сердечно-сосудистых заболеваний.

Этот вывод можно даже обосновать логически: уменьшение частоты инфекционных болезней приводит к снижению смертности людей с патологией сердечно-сосудистой системы, поэтому возрастает число заболеваний сердца и сосудов.

В действительности причины того и другого имеют глубокие социальные корни и существование корреляционной связи в значительной мере случайное.

4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ

Решение современных задач управления сложными техническими и биологическими объектами возможно лишь при наличии методологии, в рамках которой проводится исследование. Такая методология носит название системного анализа.

4.1. Алгоритмические модели процессов

С позиций описания структуры сложных биотехнических систем наиболее общей формализованной схемой представления функционирования является описание в виде агрегативной системы.

Агрегативные модели биотехнических систем

Наиболее известным общим подходом к формальному описанию процессов функционирования сложных систем является подход, предложенный Н. П. Бусленко [3]. Этот подход позволяет описывать поведение непрерывных, дискретных, детерминированных и стохастических систем, то есть является обобщенным (универсальным), и базируется на понятии *агрегативной системы* (англ. aggregate system), представляющей собой формальную схему общего вида (*A-схема*). Такая схема должна одновременно выполнять несколько функций:

- являться адекватным математическим описанием объекта моделирования, то есть системы S ;
- служить основой для построения алгоритмов и программ при машинной реализации модели M ;

- позволять в упрощенном варианте (для частных случаев) проводить аналитические исследования.

Приведенные требования в определенной степени противоречивы. Тем не менее, в рамках обобщенного подхода на основе А-схем удастся найти между ними некоторый компромисс[2].

При агрегативном подходе сначала дается нормальное определение объекта моделирования - агрегативной системы, которая является математической схемой, отображающей системный характер изучаемых объектов. При агрегативном описании сложный объект (система) разбивается на конечное число частей (подсистем), сохраняя при этом связи, обеспечивающие их взаимодействие. В качестве элемента А-схемы выступает агрегат, а связь между агрегатами (внутри системы S и с внешней средой E) осуществляется с помощью оператора сопряжения R . Очевидно, что агрегат сам может рассматриваться как А-схема, то есть может разбиваться на элементы (агрегаты) следующего уровня.

Любой агрегат характеризуется следующими множествами:

моментов времени T , входных X и выходных Y сигналов, состоящих Z в каждый момент времени t . Состояние агрегата в момент времени $t \in T$ обозначается как $z(t) \in Z$, а входные и выходные сигналы - как $x(t) \in X$, $y(t) \in Y$ соответственно.

Будем полагать, что переход агрегата из состояния $z(t_1)$ в состояние $z(t_2) \neq z(t_1)$ происходит за малый интервал времени, то есть имеет место скачек δz . Переходы агрегата из состояния $z(t_1)$ и в $z(t_2)$ определяются собственными (внутренними) параметрами самого агрегата $h(t) \in H$ и входными сигналами $x(t) \in X$.

В начальный момент времени t_0 состояния z имеют значения равные z^0 , то есть $z^0 = z(t_0)$, задаваемые законом распределения процесса $z(t)$ в момент времени t_0 , а именно $L[z(t_0)]$. Предположим, что процесс функционирования агрегата в случае воздействия входного сигнала x_n описывается случайным оператором V . Тогда в момент поступления в агрегат $t_n \in T$ входного сигнала x_n можно определить состояние:

$$z(t_n + 0) V[t_n, z(t_n), x_n]. \quad (73)$$

Обозначим полуинтервал времени $t_1 \leq t < t_2$ как $(t_1, t_2]$, а полуинтервал $t_1 < t \leq t_2$ - как $[t_1, t_2)$. Если интервал времени (t_n, t_{n+1}) не содержит ни одного момента поступления сигналов, то для $t \in (t_n, t_{n+1})$ состояние агрегата определяется случайным оператором U в соответствии с соотношением

$$z(t) = U[t, t_n z(t_n + 0)]. \quad (74)$$

Совокупность случайных операторов U и V рассматривается как оператор перехода агрегата в новые состояния. При этом процесс функционирования агрегата состоит из скачков состояний ξ в моменты поступления входных сигналов x (оператор V) и изменений состояний между этими моментами t_n и t_{n+1} (оператор U). На оператор U не накладывается никаких ограничений, поэтому допустимы скачки состояний ξ в моменты времени, не являющиеся моментами поступления входных сигналов x . Моменты скачков ξ являются особыми моментами времени t_δ , а состояния $z(t_\delta)$ — особыми состояниями А-схемы. Для описания скачков состояний ξ в особые моменты времени t_δ используется случайный оператор W , представляющий собой частный случай оператора U :

$$z(t_\delta + 0) = W[t_\delta, z(t_\delta)]. \quad (75)$$

В множестве состояний Z выделяется такое подмножество $Z^{(n)}$, что если $z(t_\delta)$ достигает $Z^{(n)}$, то это состояние является моментом выдачи выходного сигнала, определяемого оператором выходов:

$$Y = G[t_\delta, z(t_\delta)].$$

Таким образом, под *агрегатом* понимается любой объект, определяемый упорядоченной совокупностью рассмотренных множеств $T, X, Y, Z, Z^{(n)} \setminus H$ и случайных операторов V, U, W, G .

Последовательность входных сигналов, расположенных в порядке их поступления в А-схему, называется *входным сообщением*, или *x-сообщением*. Последовательность выходных сигналов, упорядоченная относительно времени выдачи, называется *выходным сообщением* или *y-сообщением*.

Существует класс больших систем, которые ввиду их сложности не могут быть формализованы в виде математических схем одиночных агрегатов, поэтому их формализуют некоторой конструкцией из отдельных агрегатов $A_n, n=1, N_A$. Для описания некоторой реальной системы S в виде А-схемы необходимо иметь описание как отдельных агрегатов A_n , так и связей между ними. При построении формального понятия А-схемы выбирают достаточно удобные способы математического описания взаимодействия между агрегатами. Для этого вводится ряд предположений о закономерностях функционирования А-схем, хорошо согласующихся с опытом исследования реальных сложных систем [2]:

1) взаимодействие между А-схемой и внешней средой E , а также между отдельными агрегатами внутри самой системы S

осуществляется при передаче сигналов, причем взаимные влияния, имеющие место вне механизма обмена сигналами, не учитываются;

2) для описания сигнала достаточно некоторого конечного набора характеристик;

3) элементарные сигналы мгновенно передаются в А-схеме независимо друг от друга по элементарным каналам;

4) к входному контакту любого элемента А-схемы подключается не более чем один элементарный канал, к выходному контакту - любое конечное число элементарных каналов при условии, что ко входу одного и того же элемента А-схемы направляется не более чем один из упомянутых элементарных каналов.

Основным элементом построения агрегативных моделей является *кусочно-линейный агрегат*, который можно представить в виде преобразователя [6, 7] (рис. 12):

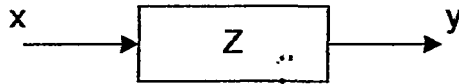


Рис. 12. Кусочно-линейный агрегат

Преобразователь функционирует во времени $t \in T[0, \infty]$, воспринимает входные сигналы $x \in X$, выдает выходные сигналы $y \in Y$ и находится в каждый момент времени в некотором состоянии $z \in Z$.

Динамика функционирования кусочно-линейного агрегата носит событийный характер, происходящие события при этом могут быть двух видов: *внутренние* и *внешние*. Внутренние события заключаются в достижении кусочно-линейным агрегатом некоторого состояния, а внешние - в поступлении входного сигнала. Предполагается, что моменты поступления входных сигналов образуют неубывающую последовательность, то есть исключается случай поступления непрерывных сигналов.

Между событиями состояние кусочно-линейного агрегата изменяется детерминированным образом. Считаем, что если моменты наступления внешнего и внутреннего событий совпадают, то изменение состояния осуществляется с учетом приоритета входных сигналов над внутренними событиями. Таким образом, процесс функционирования кусочно-линейного агрегата полностью определяется изменениями, происходящими в особые моменты времени - моменты наступления событий, внешних или внутренних.

Опишем кусочно-линейный агрегат более подробно. Будем считать, что множество входных сигналов x представляется в виде m -кратного произведения:

$$x = x_1 x_2 \dots x_m, \quad (76)$$

а множество выходных сигналов y - в виде n -кратного:

$$y = y_1 y_2 \dots y_n. \quad (77)$$

Содержательно это означает, что кусочно-линейный агрегат имеет вид многополосника с m - входными контактами и n - выходными. В общем случае $m \neq n$ (согласно пункту 4, $m \geq n$). Тогда входной сигнал имеет вид $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, а выходной - $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Входные сигналы x_n и выходные y_n , а также состояния z кусочно-линейного агрегата можно определить как *данные*. Данными считаются:

- элементарные данные;
- списки данных;
- массивы данных;
- структуры данных.

Под элементарными данными понимаются целые числа, действительные числа, символьные переменные. Терминами *список*, *массив* и *структура* обозначаются совокупности данных, используемые в программировании.

В зависимости от входного сигнала, а также от состояния кусочно-линейного агрегата вероятностным образом определяется выходной сигнал и новое состояние кусочно-линейного агрегата. Это означает, что изменяются значения элементарных данных, длины списков и т. п., описывающие выходной сигнал и состояния кусочно-линейного агрегата [2, 7].

Сети Петри

Сети Петри разрабатывались специально для описания и моделирования систем, состоящих из отдельных взаимодействующих блоков [7]. Каждый отдельный блок может быть целой системой, поведение которой описывается независимо от других блоков, за исключением процессов их взаимодействия. Основными понятиями, на которых базируется представление моделируемой системы сетью Петри, являются *события* и *условия*.

Событие представляет собой некоторое действие, происходящее в системе, которое изменяет состояние системы. Для того, чтобы в системе произошло определенное событие, необходимо

выполнение соответствующих условий. Множество таких условий задает состояние системы. В сетях Петри условия моделируются *позициями*, а события - *переходами*. Последовательная реализация событий в системе отображается в сети в виде последовательного срабатывания ее переходов. На рис. 13 [7] представлен граф сети Петри с позициями p_1 , p_2 и переходами t_1 , t_2 .

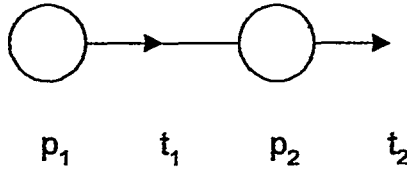


Рис.13. Граф сети Петри

Выполнение какого-либо условия в системе связано с появлением метки в соответствующей этому условию позиции сети Петри. Относительно какого-либо перехода позиции могут быть *входными* и *выходными*. Переход в сети Петри может быть реализован, только если он становится *активным*. Переход является активным, когда каждая из его входных позиций содержит *метки*. В результате реализации активного перехода удаляются метки из всех его входных позиций, и в каждую выходную позицию помещается по одной метке.

Из правил реализации переходов следует, что когда один переход имеет несколько входных позиций, после его реализации все они получают метки, то есть произойдет распараллеливание процесса. После этого активизированные параллельные участки процесса могут выполняться независимо.

Реализация переходов сети Петри осуществляется до тех пор, пока при очередной маркировке существует хотя бы один активный переход. Таким образом, при помощи аппарата сетей Петри целесообразно построение имитационных моделей, отражающих причинно-следственные связи в биотехнических системах.

Система массового обслуживания

В теории массового обслуживания основным предметом исследования является система массового обслуживания, так называемые *Q-схемы* (англ. queueing system). Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных

приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания [2, 7].

В качестве процесса обслуживания могут быть представлены различные по своей физической природе процессы функционирования систем. При этом характерным для работы таких объектов является случайное появление заявок (требований) на обслуживание и завершение обслуживания в случайные моменты времени, то есть стохастический характер процесса их функционирования. Рассмотрим основные понятия массового обслуживания, необходимые для использования Q-схем как при аналитическом, так и при имитационном подходе.

В любом элементарном акте обслуживания можно выделить две основные составляющие:

- ожидание обслуживания заявкой;
- собственно обслуживание заявки.

Это можно изобразить в виде некоторого i -го прибора обслуживания Π_i , состоящего из накопителя заявок H_i , в котором может одновременно находиться $L_i = (0, L_i^H)$ заявок, где L_i^H - емкость i -го накопителя, и канала обслуживания заявок (или просто канала) K_i . На каждый элемент прибора обслуживания Π_i поступают потоки событий: в накопитель H_i поток заявок w_i , на канал K_i - поток обслуживания u_i . Элементарный прибор обслуживания заявок изображен на рисунке 14.

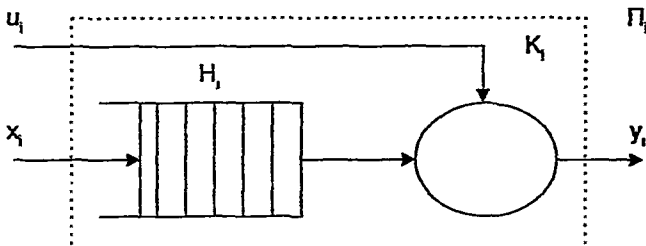


Рис. 14. Элементарный прибор обслуживания

Потоком событий называется последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то случайные моменты времени. Различают потоки однородных и неоднородных событий.

Поток событий называется *однородным*, если он характеризуется только моментами поступления этих событий (вызывающими моментами) и задается последовательностью

$$\tau_n \{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \dots\},$$

где t_n - момент наступления n -го события - неотрицательное вещественное число.

Однородный поток событий также может быть задан в виде последовательности промежутков времени между n -м и $(n-1)$ -м событиями $\{\tau_n\}$, которая однозначно связана с последовательностью вызывающих моментов $\{t_n\}$, где

$$\tau_n = t_n - t_{n-1}, n \geq 1, t_0 = 0, \text{ то есть } \tau_1 = t_1.$$

Потоком неоднородных событий называется последовательность $\{t_n, f_n\}$, где t_n - вызывающие моменты, f_n - набор признаков события.

Пример. Применительно к процессу обслуживания для неоднородного потока заявок может быть задана принадлежность к тому или иному источнику заявок, наличие приоритета, возможность обслуживания тем или иным типом канала и т. п.

Рассмотрим поток, в котором события разделены интервалами времени τ_1, τ_2, \dots , которые вообще являются случайными величинами. Пусть интервалы τ_1, τ_2, \dots независимы между собой. Тогда поток событий называется потоком с ограниченным последствием.

Поток событий называется *ординарным*, если вероятность того, что на малый интервал времени Δt , примыкающий к моменту времени t , попадает больше одного события $P_{>1}(t, \Delta t)$, пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью того, что на этот же интервал времени Δt попадет ровно одно событие $P_1(t, \Delta t)$, то есть $P_1(t, \Delta t) \gg P_{>1}(t, \Delta t)$. Если для любого интервала Δt событие

$$P_0(t, \Delta t) + P_1(t, \Delta t) + P_{>1}(t, \Delta t) = 1$$

как сумма вероятностей событий, образующих полную группу и несовместных, то для ординарного потока событий

$$P_0(t, \Delta t) + P_1(t, \Delta t) \approx 1, P_{>1}(t, \Delta t) = 0(\Delta t),$$

где $0(\Delta t)$ - величина, порядок малости которой выше, чем Δt , то есть

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [0(\Delta t) / \Delta t] = 0. \quad (78)$$

Стационарным потоком событий называется поток, для которого вероятность появления того или иного числа событий на интервале времени t зависит лишь от длины этого участка и не зависит от того, где на оси времени $0t$ взят этот участок.

Рассмотрим на оси времени $0t$ ординарный поток событий и найдем среднее число событий, наступающих на интервале времени Δt , примыкающем к моменту времени t . Получим

$$0 * P_0(t, \Delta t) + 1 * P_1(t, \Delta t) = P_1(t, \Delta t).$$

Тогда среднее число событий, наступающих на участке времени Δt в единицу времени, составит $[P_i(t, \Delta t)] / \Delta t$. Рассмотрим предел этого выражения при $\Delta t \rightarrow 0$. Если этот предел существует, то он называется *интенсивностью (плотностью) ординарного потока событий*

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [O(\Delta t) / \Delta t] = \lambda(t). \quad (79)$$

Интенсивность потока может быть любой неотрицательной функцией времени, имеющей размерность, обратную размерности времени. Для стационарного потока его интенсивность не зависит от времени и представляет собой постоянное значение, равное среднему числу событий, наступающих в единицу времени $\lambda(t) = \lambda = const$.

Обычно в приложениях при моделировании различных систем применительно к элементарному каналу обслуживания K можно считать, что поток заявок $W, \in W$, то есть интервалы времени между моментами появления заявок (вызывающие моменты) на входе K , образует подмножество неуправляемых переменных, а поток обслуживания $u, \in U$, то есть интервалы времени между началом и окончанием обслуживания заявки, образует подмножество управляемых переменных.

Заявки, обслуженные каналом K , и заявки, покинувшие прибор Π , по различным причинам не обслуженными (например, из-за переполнения накопителя H_n), образуют выходной поток $y, \in Y$, то есть интервалы времени между моментами выхода заявок образуют подмножество выходных переменных.

Процесс функционирования прибора обслуживания Π , можно представить как процесс изменения состояний его элементов во времени $z_i(t)$. Переход в новое состояние для Π , означает изменение количества заявок, которые в нем находятся (в канале K , и в накопителе H_n). Таким образом, вектор состояний для Π , имеет вид $z = (z_1^H, z_1^K)$, где z_1^H - состояние накопителя H_n ($z_1^H = 0$) - накопитель пуст, $z_1^H = 1$ - в накопителе имеется одна заявка, ... $z_1^H = L_1^H$ - накопитель полностью заполнен); L_1^H - емкость накопителя H_n , измеряемая числом заявок, которые в нем могут поместиться; z_1^K - состояние канала K , ($z_1^K = 0$ - канал свободен, $z_1^K = 1$ - канал занят и т.д.).

В практике моделирования биотехнических систем, имеющих более сложные структурные связи и алгоритмы поведения, для формализации используются не отдельные приборы обслуживания, а Q-схемы, образуемые композицией многих элементарных приборов обслуживания Π . Если каналы K , различных приборов обслуживания соединены параллельно, то имеет место *многоканальное обслуживание*

(многоканальная Q-схема), а если приборы Π_j и их параллельные композиции соединены последовательно, то имеет место *многофазное обслуживание* (многофазная Q-схема). Таким образом, для задания Q-схемы необходимо использовать оператор сопряжения R , отражающий взаимосвязь элементов структуры (каналов и накопителей) между собой.

Связи между элементами Q-схемы изображают в виде стрелок (линий потока, отражающих направление движения заявок). Различают *разомкнутые* и *замкнутые* Q-схемы. В разомкнутой Q-схеме выходной поток обслуженных заявок не может снова поступить на какой-либо элемент, то есть обратная связь отсутствует, а в замкнутых Q-схемах имеются обратные связи, по которым заявки двигаются в направлении, обратном движению вход-выход.

Собственными (внутренними) параметрами Q-схемы являются количество фаз L_ϕ , количество каналов в каждой фазе $L_{k\phi}$, $j=(1, L_\phi)$, количество накопителей каждой фазы L_{Hk} , $k=(1, L_\phi)$, емкость i -го накопителя L_i^H . Следует отметить, что в теории массового обслуживания в зависимости от емкости накопителя применяют следующую терминологию для систем массового обслуживания:

системы с потерями ($L_i^H = 0$, то есть накопитель в приборе Π_i отсутствует, а имеется только канал обслуживания K_i);

системы с ожиданием ($L_i^H \rightarrow \infty$, то есть накопитель H_i имеет бесконечную емкость, и очередь заявок не ограничивается);

системы смешанного типа (с ограниченной емкостью накопителя H_i).

Всю совокупность собственных параметров Q-схемы обозначают как подмножество H .

Для задания Q-схемы также необходимо описать алгоритмы ее функционирования, которые определяют набор правил поведения заявок в системе в различных неоднозначных ситуациях. В зависимости от места возникновения таких ситуаций различают алгоритмы (дисциплины) ожидания заявок в накопителе H_i и обслуживания заявок каналом K_i каждого элементарного обслуживающего прибора Π_i Q-схемы. Неоднородность заявок, отражающая процесс в той или иной реальной биотехнической системе, учитывается с помощью введения классов приоритетов.

В зависимости от динамики приоритетов в Q-схемах различают *статические* и *динамические* приоритеты. Статические приоритеты назначаются заранее и не зависят от состояний Q-схемы, то есть они являются фиксированными в пределах решения конкретной задачи моделирования.

Динамические приоритеты возникают при моделировании в зависимости от возникающих ситуаций. Исходя из правил выбора заявок из накопителя H , на обслуживание каналом K , можно выделить *относительные* и *абсолютные* приоритеты. *Относительный приоритет* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель H , ожидает окончания обслуживания предшествующей заявки каналом K , и только после этого занимает канал. *Абсолютный приоритет* означает, что заявка с более высоким приоритетом, поступившая в накопитель H , прерывает обслуживание каналом K заявки с более низким приоритетом и сама занимает канал (при этом вытесненная из канала заявка может либо покинуть систему, либо может быть снова записана на какое-то место в накопителе).

При рассмотрении алгоритмов функционирования приборов обслуживания Π , (каналов K , и накопителей H) необходимо также задать набор правил, по которым заявки покидают H , и K . Для накопителей - это либо правила переполнения, по которым заявки в зависимости от заполнения H , покидают систему, либо правила ухода, связанные с истечением времени ожидания заявки в накопителе. Для каналов - правила выбора маршрутов или направлений ухода. Кроме того, для заявок необходимо задать правила, по которым они остаются в канале или не допускаются до обслуживания каналом, то есть правила блокировок канала. Различают блокировки канала K , по *входу* и *по выходу*. Такие блокировки отражают наличие управляющих связей в Q -схеме, регулирующих поток заявок в зависимости от состояний Q -схемы. Весь набор возможных алгоритмов поведения заявок в схеме можно представить в виде некоторого оператора алгоритмов поведения заявок A [2].

Таким образом, Q -схема, описывающая процесс функционирования системы массового обслуживания любой сложности, однозначно задается в виде [2]

$$Q = \{W, U, H, Z, R, A\}.$$

4.2. Общая характеристика метода статистического моделирования систем

Статистическое моделирование представляет собой метод получения с помощью ЭВМ статистических данных о процессах, происходящих в моделируемой системе. Для получения представляющих интерес оценок характеристик моделируемой системы S с учетом воздействий внешней среды E статистические данные обрабатываются и классифицируются с использованием методов математической статистики [1-3,6,7].

Сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий.

Различают две области применения метода статистического моделирования:

- 1) для изучения стохастических систем;
- 2) для решения детерминированных задач.

Основной идеей, которая используется для решения детерминированных задач методом статистического моделирования, является замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики которой совпадают с результатом решения детерминированной задачи. При такой замене вместо точного решения получается приближенное решение, и погрешность уменьшается с увеличением числа испытаний N .

В результате статистического моделирования системы S получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени. Если количество реализации m достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик процесса функционирования системы S .

Рассмотрим на примере сущность метода статистического моделирования.

Пример. Необходимо методом статистического моделирования найти оценки выходных характеристик некоторой стохастической системы SK , функционирование которой описывается следующими соотношениями: $x = 1 - e^{-\lambda}$ — входное воздействие, $y = 1 - e^{-\varphi}$ — воздействие внешней среды, где λ и φ — случайные величины, для которых известны их функции распределения [2]. Целью моделирования является оценка математического ожидания $M[y]$ величины, зависимость последней от входного сигнала x и воздействия внешней среды y имеет вид

$$y = (x^2 + v^2)^{1/2}.$$

В качестве оценки математического ожидания $M[y]$, как следует из приведенных теорем теории вероятностей, может выступать среднее арифметическое, вычисленное по формуле

$$\bar{y} = (1/N) \sum_{i=1}^N y_i,$$

где y_i - случайное значение величины y ; N - число реализаций, необходимое для статистической устойчивости результатов.

Структурная схема системы S_a представлена на рис. 15.

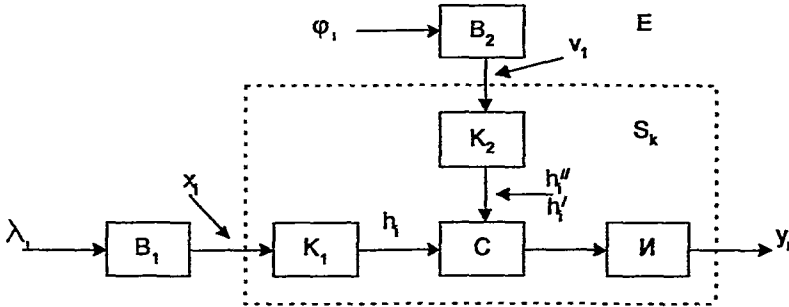


Рис. 15. Структурная схема системы S_a

Здесь элементы выполняют следующие функции:

вычисление B_1 : $x_1 = 1 - e^{-\lambda}$; B_2 : $v_1 = 1 - e^{-\varphi}$,

возведение в квадрат K_1 : $h_1' = (1 - e^{-\lambda})^2$ и K_2 : $h_1'' = (1 - e^{-\varphi})^2$,

суммирование C : $h_1 = (1 - e^{-\lambda})^2 + (1 - e^{-\varphi})^2$,

извлечение квадратного корня $И$: $y_1 = ((1 - e^{-\lambda})^2 + (1 - e^{-\varphi})^2)^{1/2}$.

4.3. Генерация случайных чисел

Рассмотрим возможности и особенности получения последовательностей случайных чисел при статистическом моделировании систем [2]. На практике используются три основных способа генерации случайных чисел; *аппаратный (физический)*, *табличный (файловый)* и *алгоритмический (программный)*.

Аппаратный способ генерации псевдослучайных чисел

При аппаратном способе генерации случайные числа вырабатываются специальной электронной приставкой *генератором случайных чисел*, служащей в качестве одного из внешних устройств ЭВМ. Таким образом, реализация этого способа генерации не требует дополнительных вычислительных операций ЭВМ по выработке случайных чисел, а необходима только операция обращения к внешнему устройству [2].

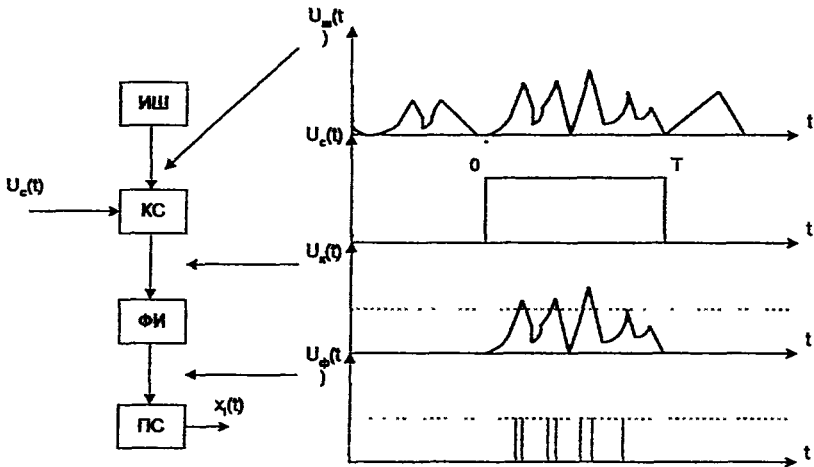


Рис. 16. Структурная схема аппаратного генератора случайных чисел

В качестве физического эффекта, лежащего в основе таких генераторов, чаще всего используются шумы в электронных и полупроводниковых приборах и явления распада радиоактивных элементов. Рассмотрим принцип аппаратного способа получения случайных чисел на основе эффекта шума в полупроводниковых приборах [2]. Структурная схема аппаратного генератора случайных чисел приведена на рис. 16.

На структурной схеме, приведенной на рисунке, приняты следующие обозначения: ИШ - источник шума, КС' - ключевая схема, ФИ - формирователь импульсов, ПС - пересчетная схема. При усилении шумов на выходе И ШШ получается напряжение $U_{ш}(t)$, которое является случайным процессом. Отрезок шумовой реализации $U_{к}(t)$, сформированный на интервале времени $(0, T)$ с помощью КС, содержит случайное число выбросов. Сравнение напряжения $U_{к}(t)$ с пороговым напряжением $U_{п}$ позволяет сформировать на выходе ФИ серию импульсов $U_{ф}(t)$. Тогда на выходе ПС может быть получена последовательность случайных чисел $x_i(T)$. Например, если провести масштабирование и принять длину интервала $(0, T)$ за единицу, то значения интервалов времени $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ между соседними импульсами $U_{ф}(t)$ будут случайными числами $x_i \in [0, 1]$. Возможны и другие схемные решения аппаратных генераторов случайных чисел. Недостатком аппаратного способа является то, что данный способ не

позволяет гарантировать качество последовательности непосредственно во время моделирования системы на ЭВМ, а также повторно получать при моделировании одинаковые последовательности чисел.

Табличный способ

Если случайные числа, оформленные в виде таблицы, поместить во внешнюю или оперативную память ЭВМ, предварительно сформировав из них соответствующий файл (массив чисел), то такой способ будет называться табличным. Табличный способ получения случайных чисел при моделировании систем рационально использовать при сравнительно небольшом объеме таблицы [2].

Алгоритмический способ

Алгоритмический способ получения последовательностей случайных чисел основан на формировании случайных чисел в ЭВМ с помощью специальных алгоритмов и реализующих эти алгоритмы программ. Каждое случайное число вычисляется с помощью соответствующей программы по мере возникновения потребностей при моделировании системы на ЭВМ.

В этом случае программная имитация случайных воздействий любой сложности сводится к генерированию некоторых стандартных (базовых) процессов. В качестве базового может быть принят любой удобный в случае моделирования конкретной системы S процесс (например, пуассоновский поток при моделировании Q-схемы).

При дискретном моделировании базовым процессом является последовательность чисел $\{x_{ij}\} = x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ij}$ представляющая собой реализацию независимых, равномерно распределенных на интервале:

$(0, 1)$ случайных величин $\{\xi_{ij}\} = \xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{ij}$ или - в статистических терминах - повторную выборку из равномерно распределенной на $(0, 1)$ генеральной совокупности значений величины ξ .

Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение в интервале (a, b) , если ее функции плотности $f(x)$ и распределения $F(x)$ соответственно примут вид

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x \leq a, x \geq b, \end{cases} \quad (80)$$

$$F(x) = \begin{cases} (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (81)$$

На рис. 17 представлены графические зависимости для функции плотности и распределения случайной величины.

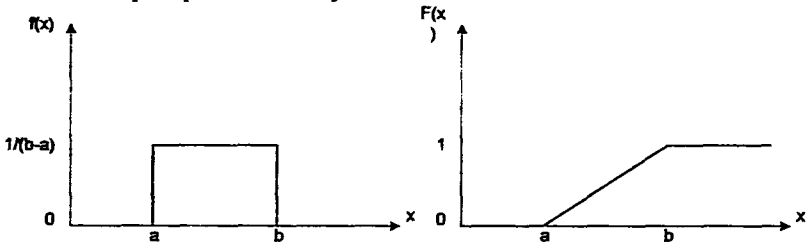


Рис. 17

Определим числовые характеристики случайной величины ξ , принимающей значения x : математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение соответственно:

$$M[\xi] = \int_a^b x f(x) dx = \int_a^b x dx / (b-a) = (a+b)/2; \quad (82)$$

$$D[\xi] = \int_a^b (x - M[\xi])^2 f(x) dx = (b-a)^2 / 12; \quad (83)$$

$$\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]} = (b-a) / 2\sqrt{3}. \quad (84)$$

При моделировании систем на ЭВМ приходится иметь дело со случайными интервалами $(0, 1)$, когда границы интервала $a=0$, $b=1$. Рассмотрим частный случай равномерного распределения, когда функции плотности и распределения соответственно имеют вид

$$f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 1, \\ 0, x < 0, x > 1, \end{cases} \quad (85)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, 0 > x, \\ x, 0 \leq x \leq 1, \\ 1, x > 1. \end{cases} \quad (86)$$

Это распределение имеет математическое ожидание $M[\xi] = 1/2$ и дисперсию $D[\xi] = 1/12$. Получить такое распределение на цифровой ЭВМ невозможно, так как машина оперирует с n -разрядными числами. Поэтому на ЭВМ вместо непрерывной совокупности равномерных случайных чисел интервала $(0, 1)$ используют дискретную последовательность случайных чисел того же интервала. Закон распределения такой дискретной последовательности называют *квазиравномерным распределением*.

Случайная величина ξ_i , имеющая квазиравномерное распределение в интервале $(0, 1)$, принимает значения $x_i = i/(2^n - 1)$ с вероятностями $p_i = 1/2^n$, $i = [0, 2^n - 1]$.

Математическое ожидание и дисперсия квазиравномерной случайной величины соответственно равны:

$$M[\xi] = 1/2, \quad D[\xi] = (2^n + 1) / 12(2^n - 1).$$

Таким образом, математическое ожидание квазиравномерной случайной величины совпадает с математическим ожиданием равномерной случайной последовательности интервала $(0, 1)$, а дисперсия отличается только множителем $(2^n + 1) / (2^n - 1)$, который при достаточно больших n близок к единице.

На ЭВМ невозможно получить идеальную последовательность случайных чисел хотя бы потому, что на ней можно оперировать только с конечным множеством чисел [2]. Кроме того, для получения значений x случайной величины ξ используются формулы (алгоритмы). Поэтому такие последовательности, являющиеся по своей сути детерминированными, называются *псевдослучайными*.

4.4. Проверка качества последовательностей псевдослучайных чисел

Эффективность статистического моделирования систем и достоверность получаемых результатов существенным образом зависят от качества исходных (базовых) последовательностей псевдослучайных чисел, которые являются основой для получения стохастических воздействий на элементы моделируемой системы.

Поэтому, прежде чем приступать к реализации моделирующих алгоритмов, необходимо убедиться в том, что исходная последовательность псевдослучайных чисел удовлетворяет предъявляемым к ней требованиям, так как в противном случае даже при наличии абсолютно правильного алгоритма моделирования процесса функционирования системы S по результатам моделирования нельзя судить о характеристиках системы [2].

Результаты анализа системы S , полученные методом статистического моделирования, существенно зависят от качества используемых псевдослучайных квазиравномерно распределенных последовательностей чисел. Поэтому все применяемые генераторы случайных чисел должны перед моделированием системы пройти специальное тестирование, которое представляет собой комплекс проверок по различным статистическим критериям, включая в качестве основных проверки (тесты) на *равномерность*, *стахастичность* и *независимость*. Рассмотрим возможные методы проведения таких проверок, наиболее часто используемые в практике моделирования систем.

Проверка равномерности

Проверка равномерности последовательностей псевдослучайных квазиравномерно распределенных чисел $\{x_i\}$ может быть выполнена *по гистограмме* с использованием косвенных признаков [2]. Суть *проверки по гистограмме* сводится к следующему. Выдвигается гипотеза о равномерности распределения чисел в интервале $(0, 1)$. Затем интервал $(0, 1)$ разбивается на m равных частей, тогда при генерации последовательности $\{x_i\}$ каждое из чисел x_i с вероятностью $p_j = 1/m$, $j=(1, m)$ попадает в один из подынтервалов. Всего в каждый j -й подынтервал попадает N_j чисел последовательности $\{x_i\}$, $i=(1, N)$, причем

$$N = \sum_{j=1}^m N_j. \quad (87)$$

Относительная частота попадания случайных чисел последовательности $\{x_i\}$ в каждый из подынтервалов будет равна N_j/N . Вид соответствующей гистограммы показан на рис. 18.

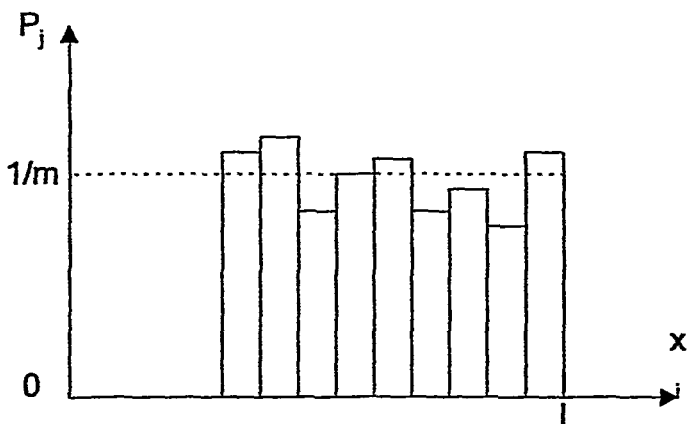


Рис. 18

На рисунке пунктирная линия соответствует теоретическому значению P_j , сплошная - экспериментальному N_j/N . Очевидно, что если числа x_i принадлежат псевдослучайной квазиравномерно распределенной последовательности, то при достаточно больших N экспериментальная гистограмма приблизится к теоретической $1/m$.

Оценка степени приближения, то есть равномерности последовательности $\{x_i\}$, может быть проведена с использованием критериев согласия. На практике обычно принимается $m=20...50$, $N=(10^2...10^3) m$ [2].

Проверка стохастичности

Проверка стохастичности последовательностей псевдослучайных чисел $\{x_i\}$ наиболее часто проводится методами комбинаций и серий. Суть метода комбинации сводится к определению закона распределения (появления) числа единиц (нулей) в n -разрядном двоичном числе X_n . На практике длину последовательности N берут достаточно большой и проверяют все n разрядов или только m старших разрядов числа X_i [2].

Теоретически появление j единиц в l разрядах двоичного числа X_l описывается исходя из независимости отдельных разрядов биномиальным законом распределения:

$$P(j, l) = C_l^j p^j (1-p)^{l-j} = C_l^j p^j (1-p)^{l-j}, \quad (88)$$

где $P(j, l)$ - вероятность появления j единиц в l разрядах двоичного числа, $X_i(l)$ $p(l)=p(0)=1/2$ - вероятность появления единицы (нуля) в любом разряде числа X_i , $c^j = l!/[j!(l-j)!]$.

Тогда при фиксированной длине выборки N теоретически ожидаемое число появления случайных чисел X_i с j единицами в проверяемых l разрядах будет равна

$$n_j = N c^j p^j (1-p)^{l-j}. \quad (89)$$

После нахождения теоретических и экспериментальных вероятностей $P(j, l)$ или чисел n_j при различных значениях $l \leq n$ гипотеза о стохастичности проверяется с помощью *критериев согласия*.

При анализе стохастичности последовательности чисел $\{x_i\}$ *методом серий* последовательность разбивается на элементы первого и второго рода (a и b), то есть:

$$x_i = \begin{cases} a, & x_i < p_i, \\ b, & x_i \geq p_i, \end{cases} \quad (90)$$

где $0 < p < 1$.

Серией называется любой отрезок последовательности $\{x_i\}$, состоящий из следующих друг за другом элементов одного и того же рода. Причем число элементов в отрезке (a или b) называется *длиной серии*. После разбиения последовательности $\{x_i\}$ на серии первого и второго рода будем иметь, например, последовательность вида

... *aabbbbbaaabaabbbababab...*

Так как случайные числа a и b в данной последовательности независимы и принадлежат последовательности $\{x_i\}$, равномерно распределенной на интервале $(0, 1)$, то теоретическая вероятность появления серии длиной j в последовательности длиной l в N опытах (под опытом здесь будем понимать генерацию числа x_i , и проверку условия $x_i < p$) определится формулой Бернулли [2]

$$P(j, l) = c^j l p^j (1-p)^{l-j}. \quad (91)$$

В случае экспериментальной проверки оцениваются частоты появления серий длиной j . В результате получаются теоретическая и экспериментальная зависимости $P(j, l)$, сходимость которых проверяется по известным *критериям согласия*, причем проверку целесообразно проводить при различных значениях $p(0 < p < 1)$ и l .

Проверка независимости

Проверка независимости элементов последовательности псевдослучайных квазиравномерно распределенных чисел $\{x_i\}$ проводится на основе вычисления *корреляционного момента* [2].

Случайные величины ξ и η называются независимыми, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какое значение приняла другая. Таким образом, независимость элементов последовательности $\{x_i\}$ может быть проверена путем введения в рассмотрение последовательности $\{y_i\} = \{x_{i-T}\}$, где T - величина сдвига последовательностей.

В общем случае корреляционный момент дискретных случайных величин ξ и η с возможными значениями x_i и y_i определяется по формуле [2]

$$K_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j (x_i - M[\xi])(y_j - M[\eta])p_{ij}, \quad (92)$$

где p_{ij} - вероятность того, что (ξ, η) примет значение (x_i, y_j) .

Корреляционный момент характеризует рассеивание случайных величин ξ и η и их зависимость. Если случайные числа независимы, то $K_{\xi\eta} = 0$.

4.5. Моделирование случайных воздействий

При моделировании системы S методом имитационного моделирования и в частности статистического моделирования существенное внимание уделяется учету случайных факторов и воздействий на систему.

Формирование на ЭВМ реализаций случайных объектов любой природы сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел.

Простейшими случайными объектами при статистическом моделировании S являются *случайные события*.

Рассмотрим некоторые особенности их моделирования. Пусть имеются случайные числа x_i , т.е. возможные значения случайной величины ξ , равномерно распределенной на интервале $(0;1)$. Необходимо реализовать случайное событие A , наступающее с заданной вероятностью P .

Определим A как событие, состоящее в том, что выбранное значение x_i случайной величины ξ удовлетворяющее неравенству:

$$x_i \leq P.$$

Тогда вероятность события A будет равна

$$P(A) = \int_0^P dx = P. \quad (93)$$

Противоположное событие \bar{A} состоит в том, что $x_i > P$. Процедура моделирования в этом случае состоит в выборе значений x_i и в сравнении их с P . При этом если условие $x_i \leq P$ выполняется, то исходом испытания является событие A .

Таким же образом можно рассмотреть группу событий. Пусть A_1, A_2, \dots, A_S - полная группа событий, наступающих с вероятностями P_1, P_2, \dots, P_S , соответственно. Определим A_m как событие состоящее в том, что выбранное значение x_i случайной величины ξ удовлетворяет неравенству

$$l_{m-1} \leq x_i \leq l_m,$$

где $l_r = \sum_{i=1}^r P_i$.

Тогда

$$P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = P_m. \quad (94)$$

Процедура моделирования испытаний в этом случае состоит в последовательном сравнении x_i со значениями l_r . Исходом испытания является событие A_m . Эту процедуру называют определением исхода испытания по жребию в соответствии с вероятностями P_1, P_2, \dots, P_S .

Рассмотрение процедур моделирования проводилось в предположении, что для испытаний применяются случайные числа x_i , имеющие равномерное распределение в интервале $(0,1)$.

При моделировании на ЭВМ используются псевдослучайные числа с квазиравномерным распределением, что приводит к некоторой ошибке.

Пример. Пусть имеются n -разрядные случайные числа с возможными значениями $x_i^* = \frac{i}{(2^n - 1)}$, $i = 0, (2^n - 1)$. Подставив в условие $x_i \leq P$ число x_i^* , определим A^* как событие, состоящее в том, что $x_i^* < P$. Вероятность наступления события A^* может быть определена как

$$P(A^*) = \left(\frac{m}{2^n}\right), \quad (95)$$

где m – количество случайных чисел, меньших или равных P .

Отсюда следует, что использование x_i^* вместо x_i приводит к ошибке в определении вероятности события:

$$\Delta P = \frac{m}{2^n} - P. \quad (96)$$

Для формирования возможных значений случайных величин с заданным законом распределения исходным материалом служат базовые последовательности случайных чисел $\{x_i\}$, имеющие равномерное распределение в интервале $(0; 1)$.

Другими словами, случайные числа x_i могут быть преобразованы в возможные значения y_j случайной величины η , закон распределения которой задан.

Дискретные случайные величины.

Рассмотрим особенности преобразования для случая получения дискретных случайных величин. Дискретная случайная величина μ принимает значение $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_i \leq \dots$ с вероятностями $P_1, P_2, \dots, P_j, \dots$.

Для получения дискретных случайных величин можно использовать метод обратной функции. Если ξ равномерно

распределенная на интервале (0; 1) случайная величина, то искомая случайная величина η получается с помощью преобразования

$$\eta = F_{\eta}^{-1}(\xi), \quad (97)$$

где F_{η}^{-1} - функция, обратная F_{η} .

Алгоритм вычисления сводится к выполнению следующих действий:

если $x_1 < P_1$ то $\eta = y_1$, иначе,

если $x_2 < P_1 + P_2$, то $\eta = y_2$, иначе,

.... ..

если $x_j < \sum_{j=1}^m P_j$, то $\eta = y_m$, иначе,

.....

При счете среднее число циклов сравнения

$$\bar{\mu} = \sum_{j=1}^{\infty} jP_j. \quad (98)$$

Непрерывные случайные величины.

Рассмотрим особенности генерации непрерывных случайных величин. Непрерывная случайная величина η задана интегральной функцией распределения:

$$F_{\eta}(y) = P(\eta \leq y) = \int_{-\infty}^y f_{\eta}(y) dy, \quad (99)$$

где $f_{\eta}(y)$ - плотность вероятностей.

Для получения непрерывных случайных величин с заданным законом распределения, как и для дискретных величин, можно воспользоваться методом обратной функции.

Взаимно однозначная монотонная функция (86) преобразует равномерно распределенную на интервале (0; 1) величину ξ в η с требуемой плотностью $f_{\eta}(y)$.

Действительно, если случайная величина η имеет плотность распределения $f_{\eta}(y)$, то распределение случайной величины

$$\xi = \int_0^{\eta} f_{\eta}(y) dy$$

является равномерным в интервале (0; 1).

На основании этого можно сделать следующий вывод.

Чтобы получить число, принадлежащее последовательности случайных чисел $\{y_j\}$, имеющих функцию плотности $f_{\eta}(y)$, необходимо разрешить относительно y_j уравнение

$$\int_{-\infty}^{y_j} f_{\eta}(y) dy = x_i. \quad (100)$$

Пример. Необходимо получить случайные числа y_j с показательным законом распределения:

$$f_{\eta}(y) = \lambda e^{-\lambda y}, y > 0.$$

С учетом (89) получим

$$\lambda \int_0^{y_j} e^{-\lambda y} dy = x_i,$$

где x_i - случайное число, имеющее равномерное распределение на интервале (0; 1). Тогда

$$1 - e^{-\lambda y} = x_i, \quad y_j = -\ln(1 - x_i) / \lambda.$$

Учитывая, что случайная величина $\xi_1 = 1 - \xi$ имеет также равномерное распределение на (0; 1), можно записать

$$y_j = -\ln \frac{x_i}{\lambda}.$$

Приближенные способы преобразования случайных чисел.

В практике моделирования систем часто пользуются приближенными способами преобразования случайных чисел, которые можно классифицировать:

- универсальные способы, с помощью которых можно получать случайные числа с законом распределения любого вида;
- не универсальные, пригодные для получения случайных чисел с конкретным законом распределения.

Рассмотрим приближенный универсальный способ, основанный на кусочной аппроксимации функции плотности распределения. Пусть требуется получить последовательность случайных чисел $\{y_j\}$ с функцией плотности $f_\eta(y)$, возможные значения которой лежат в интервале (a, b) .

Представим $f_\eta(y)$ в виде кусочно-постоянной функции, т.е. разобьем интервал (a, b) на m интервалов, и будем считать $f_\eta(y)$ на каждом интервале постоянной.

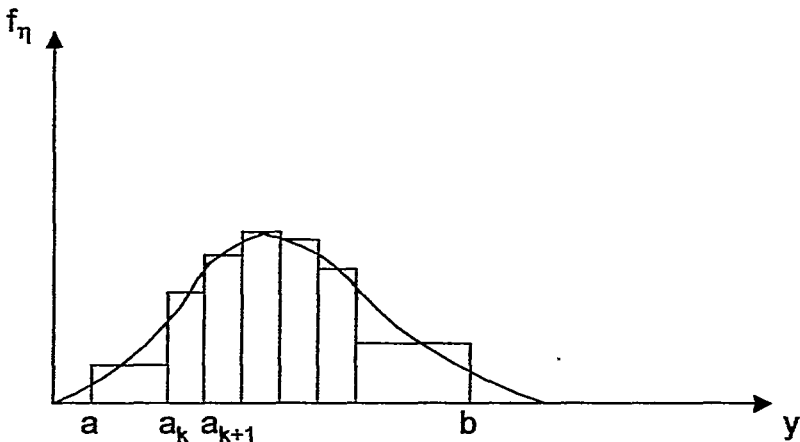


Рис. 19.

Тогда случайную величину η можно представить в виде

$$\eta = a_k + \eta_k^*, \quad (101)$$

где a_k - абсцисса левой границы k -го интервала, η_k^* - случайная величина, возможные значения которой располагаются равномерно

внутри k -го интервала, т.е. на каждом участке (a_k, a_{k+1}) величина η_k^* считается распределенной равномерно.

Чтобы аппроксимировать $f_\eta(y)$ наиболее удобным для практических целей способом, целесообразно разбить (a, b) на интервалы так, чтобы вероятность попадания случайной величины η в любой интервал (a_k, a_{k+1}) была постоянной, т.е. не зависела от номера интервала k .

Таким образом, для вычисления a_k воспользуемся следующим соотношением:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f_\eta(y) dy = 1/m. \quad (102)$$

Алгоритм машинной реализации этого способа получения случайных чисел сводится к следующему:

1. Генерируется случайное равномерно распределенное число x_i на $(0; 1)$.
2. С помощью этого числа случайным образом выбирается интервал (a_k, a_{k+1}) .
3. Генерируется число x_{i+1} и масштабируется с целью приведения его к интервалу (a_k, a_{k+1}) , т.е. умножается на коэффициент $(a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$.
4. Вычисляется случайное число $y_j = a_k + (a_{k+1} - a_k)x_{i+1}$ с требуемым законом распределения.

Особенности статистической обработки результатов моделирования систем

Рассмотрим наиболее удобные для программной реализации методы оценки распределений при достаточно большом объеме выборки (число реализаций N). Математическое ожидание и дисперсия случайных величин ξ соответственно имеет вид

$$\mu_\xi = M[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx; \quad (103)$$

$$\sigma_{\xi}^2 = D[\xi] = M[(x - \mu_{\xi})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_{\xi})^2 f(x) dx, \quad (104)$$

где $f(x)$ - плотность распределения случайных величин ξ , принимающих значение x .

При проведении имитационного эксперимента со стохастической моделью системы S определить эти моменты нельзя, т. к. плотность распределения, как правило, неизвестна. Поэтому при обработке результатов моделирования приходится довольствоваться лишь некоторыми оценками моментов, получаемых на конечном числе реализаций N .

При независимых наблюдениях значений случайной величины ξ в качестве таких оценок используется:

$$\bar{x} = \bar{\mu}_{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad (105)$$

$$S_b^2 = \bar{\sigma}_{\xi}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2, \quad (106)$$

где \bar{x} и S_b^2 - выборочное среднее и выборочная дисперсия, соответственно.

Знак \sim (тильда) над $\bar{\mu}_{\xi}$ и $\bar{\sigma}_{\xi}^2$ означает, что эти выборочные моменты используются в качестве оценок математического ожидания μ_{ξ} и дисперсии σ_{ξ}^2 . К качеству оценок, получаемых в результате статистической обработки результатов моделирования, предъявляются следующие требования:

1. Несмещенность оценки, т.е. равенство математического ожидания оценки определяемому параметру $M[\bar{g}] = \tilde{g}$, где \tilde{g} - оценки переменной (параметра) g ,
2. Эффективность оценки, т.е. минимальность среднего квадрата ошибки данной оценки $M[(\tilde{g}_1 - g)^2] \leq M[(\tilde{g}_2 - g)^2]$, где \tilde{g}_1 - рассматриваемая оценка, \tilde{g}_2 - любая другая оценка.
3. Самостоятельность оценки, т.е. сходимость по вероятности при $N \rightarrow \infty$ к оцениваемому параметру.

4. $\lim_{N \rightarrow \infty} P\{|\tilde{g} - g| \geq \varepsilon\} = 0, \quad \varepsilon > 0$ либо, учитывая

неравенство Чебышева, достаточное (но не обязательное, но необходимое) условие выполнения этого неравенства заключается в том, чтобы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M[(\tilde{g} - g)^2] = 0. \quad (107)$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Биотехнические системы. Теория и проектирование: Уч. пособие/ Под ред. Ахутина В. М.- Л., 1981.- 220 с.
2. Советов Б. Я., Яковлев С. А. Моделирование систем: Уч. для вузов. -М., 1985.-271 с.
3. Бусленко Н. П. Моделирование сложных систем.- М., 1978.- 326 с.
4. Антомонов Ю. Г. Моделирование биологических систем: Справочник, Киев, 1977.- 260 с.
5. Лебедев А. Н. Основы теории моделирования. - Пенза, 1977.- 288 с.
6. Львович Я. Е., Фролов М. В. Моделирование биотехнических и медицинских систем: уч. пособие/ Под ред. В. Н. Фролова,- Воронеж, 1994. - 194 с.
7. Зацепина С. А., Львович Я. Е., Фролов М. В. Управление в биотехнических и медицинских систем: уч. пособие/ Под ред. В. Н. Фролова.-Воронеж, 1994. - 145 с.
8. Аверьянов А.Н. Системное познание мира. – М.: Политиздат, 1985.
9. Винер Н.Кибернетика. – М: Наука, 1983.
10. Денисов А.А., Колесников Д.М. Теория больших систем управления. – Л: Энергоиздат, 1982.
11. Емельянов С.В., Напельбаум Э.Л. Системы, целенаправленность, рефлексия. – М: Наука, Ежегодник "Системные исследования." 1981, С.7-38.
12. Канторович Л.В., Плиско В.Е. Системный подход в методологии математики. – М: Ежегодник "Системные исследования," 1983, С. 27-41.
13. Клир Дж. Наука о системах: новое измерение науки. – М: Наука. Ежегодник "Системные исследования," 1983, С.61-85.
14. Мороз А.И. Курс теории систем. – М: ВШ, 1987.
15. Новик И.Б. Нильс Бор и вопросы системного мышления. – М: Ежегодник "Системные исследования," 1991, С 91-108.
16. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.Л. Введение в системный анализ – М:ВШ, 1989.
17. Поваров Г.Н. Введение к книге Н.Винера "Кибернетика" - М: Наука, 1989.
18. Поваров Г.Н. Введение к книге Холла "Опыт методологии для системотехники" - М: Советское радио, 1975.

19. Рапорт А. Различные подходы к построению общей теории систем: элементаристский и организмический. – М: Ежегодник "Системные исследования", 1983, С.42-60.
20. Холл А. Опыт методологии для системотехники. – М: Советское радио, 1975.
21. Шугрин С.М. Космическая организованность биосферы и ноосферы – Новосибирск: Наука, 1999.
22. Садовский В.Н. Проблемы философского обоснования системных исследований. – М: Наука, Ежегодник "Системные исследования", 1984, С.32-51.
23. Щедровицкий, Г.П. Принципы и общая схема методологической организации системно-структурных исследований и разработок. – В книге Системные исследования. – М: Наука, Ежегодник "Системные исследования", 1981, С 192-227.

Содержание

1. СИСТЕМЫ И СИСТЕМНОСТЬ	3
1.1. Определение системы	3
1.2. Классификация систем	6
1.3. Сложная и большая система	13
1.4. Системность познавательных процессов	14
1.5. Системность как всеобщее свойство материи	18
1.6. Биологические системы	21
2. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ	22
2.1. Моделирование как категория. Понятие моделирования.	22
2.2. Понятие модели	24
2.3. Моделирование как метод научного познания	24
2.4. Модели в биологии	27
2.5. Теория моделирования	30
2.6. Принципы системного подхода в моделировании систем	36
2.7. Надежность и достоверность результатов медицинского эксперимента	39
2.8. Надежность результатов вычислений	40
2.9. Проверка гипотез	43
2.10. Доверительная оценка статистических данных	46
2.11. Методы графической обработки результатов измерений	52
2.12. Методы подбора эмпирических формул	55
3. РЕГРЕССИОННЫЙ И ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ	57
3.1. Коэффициент корреляции	58
3.2. Ранговые корреляции	61
3.3. Линейная регрессия	63
3.4. Однофакторный дисперсионный анализ	64
3.5. Двухфакторный и многофакторный дисперсионный анализ	67
3.6. Регрессия рядов динамики	69
3.7. Проверка гипотезы о наличии тренда	70
3.8. Выявление тренда методом скользящей средней	72
3.9. Особенности статистических методов анализа медико-биологических исследований	74
4. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ	75
4.1. Алгоритмические модели процессов	75
4.2. Общая характеристика метода статистического моделирования систем	85
4.3. Генерация случайных чисел	87

4.4 Проверка качества последовательностей псевдослучайных чисел	91
4.5. Моделирование случайных воздействий	95
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ_СПИСОК	104

Кириченко Игорь Алексеевич
Старченко Ирина Борисовна

Учебное пособие

**МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ И АНАЛИЗА
СИСТЕМ В БИОМЕДИЦИНСКОЙ
ИНЖЕНЕРИИ**

НАПРАВЛЕНИЕ:

553400 – БИОМЕДИЦИНСКАЯ ИНЖЕНЕРИЯ

Ответственный за выпуск
Редактор

Кириченко И.А.
Белова Л.Ф.

ЛР 02205665 от 23.06.1997 г.
Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная.
Усл.п. л. – 7,0
Заказ № 430

Подписано к печати 24.11.03
Печать офсетная.

Уч.-изд. л. – 6,2
Тираж 100 экз.

«С»

Издательство Таганрогского государственного радиотехнического
университета
Таганрог, 28, ГСП 17А, Некрасовский, 44
Типография Таганрогского государственного радиотехнического
университета
Таганрог, 28, ГСП 17А, Энгельса, 1